

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Saša Goran

ZAGREB, 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

MODEL HELIKOPTERSKOG ROTORA ZATVORENE FORME

Mentor:  
izv. prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

Student:  
Saša Goran

ZAGREB, 2014.

— *Ovdje umetni tekst zadataka za diplomski rad!* —

*Zahvaljujem se svom mentoru izv. prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku na pomoći, znanju i potpori pruženoj tokom izrade ovog diplomskog i tokom studija. Također se zahvaljujem kolegi na N.Š. na pruženoj pomoći.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, ožujak 2014.

Saša Goran

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis tablica	ix
Popis oznaka	x
Sažetak	1
Summary	2
1. Uvod	3
2. Opis modela rotora	4
2.1. Osnovne pretpostavke . . . . .	4
2.2. Koordinatni sustavi . . . . .	5
2.3. Brzine . . . . .	7
2.4. Mahanje . . . . .	9
2.5. Sile i momenti . . . . .	16
2.6. Problem inducirane brzine . . . . .	20
3. Vrste artikuliranih rotora	23
3.1. Osnovna geometrija . . . . .	23
3.2. Jednostavni artikulirani rotor . . . . .	24

3.3. Artikulirani rotor sa pomaknutim zglobom mahanja . . . . .	27
3.4. Artikulirani rotor sa oprugom . . . . .	28
3.5. Delta-3 efekt . . . . .	30
<b>4. Analiza rezultata</b>	<b>33</b>
4.1. Analiza rezultata za lebdenje . . . . .	33
4.2. Analiza rezultata za horizontalni let . . . . .	33
<b>5. Zaključak</b>	<b>42</b>
<b>Literatura</b>	<b>44</b>

# Popis slika

2.1	Koordinatni sustav tijela letjelice [1]	6
2.2	IELA koordinatni sustav [1]	7
2.3	IERA koordinatni sustav [1]	8
2.4	Razlika sile uzgona određena brzinom leta i aerodinamičkom brzinom [1]	9
2.5	Rotirajući koordinatni sustav rotora s prikazom kuta mahanja kraka i sila koje su razmatrane za element kraka [1]	10
2.6	Kut konusa [2]	13
2.7	Prikaz TPP-a sa lijeve strane i $a_1$ [1]	14
2.8	Prikaz TPP-a sa stražnje strane i $b_1$ [1]	14
2.9	Disk rotora pod napadnim kutom [1]	21
3.1	Prikaz azimuta sa smjerom vrtnje rotora gledano s gornje strane helikoptera [1]	24
3.2	Razlika nagiba profila u vrhu i korijenu kraka [1]	25
3.3	Prikaz kuta mahanja [1]	25
3.4	Artikulirani rotor [1]	26
3.5	Potpuno artikulirani rotor [1]	26
3.6	Artikulirani rotor sa pomaknutim zglobovima mahanja [1]	27
3.7	Frekvencija mahanja u odnosu na $e$	28
3.8	Artikulirani rotor sa oprugom [1]	29
3.9	Frekvencija mahanja u odnosu na krutost opruge	30
3.10	Rotor bez delta-3, sa virtualnom i realnom delta-3 konfiguracijom [1]	31



3.11	Frekvencija mahanja u odnosu na delta-3 . . . . .	32
4.1	Odnos koeficijenta potiska, $C_T$ , i postavnog kuta, $\theta_0$ , u lebdenju i za $\theta_T = 0$ u usporedbi sa eksperimentalnim rezultatima . . . . .	34
4.2	Odnos koeficijenta snage, $C_P$ , i postavnog kuta, $\theta_0$ , u lebdenju i za $\theta_T = 0$	35
4.3	Odnos kuta konusa, $\beta_0$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	35
4.4	Odnos uzdužnog cikličnog kuta, $a_1$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	37
4.5	Odnos bočnog cikličnog kuta, $b_1$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	37
4.6	Odnos inducirane brzine, $w_w$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	38
4.7	Odnos potisne sile, $T$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	38
4.8	Odnos sile u smjeru osi x, $F_x$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	39
4.9	Odnos sile u smjeru osi y, $F_y$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	39
4.10	Odnos momenta oko osi x, $M_x$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	40
4.11	Odnos momenta oko osi y, $M_y$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	40
4.12	Odnos okretnog momenta rotora, $Q$ , i koeficijenta napredovanja, $\mu$ . . . . .	41

# Popis tablica

4.1	Podaci o helikopteru SA 330 Puma . . . . .	36
4.2	Ulazni podaci upravljanja za horizontalni let . . . . .	36

# Popis oznaka

$A_1$	bočni ciklični postavni kut . . . . .	11
$a_1$	uzdužni ciklični kut mahanja . . . . .	13
$a_0$	nagib koeficijenta sile uzgona profila . . . . .	13
$A$	površina diska rotora . . . . .	21
$a_x$	$x$ komponenta ubrzanja letjelice . . . . .	10
$a_y$	$y$ komponenta ubrzanja letjelice . . . . .	10
$a_z$	$z$ komponenta ubrzanja letjelice . . . . .	10
$B_1$	uzdužni ciklični postavni kut . . . . .	11
$b_1$	bočni ciklični kut mahanja . . . . .	13
$B_T$	koeficijent gubitaka na vrhu kraka . . . . .	11
$c$	dužina tetive . . . . .	11
$C_X$	koeficijent sile u smjeru osi $x$ . . . . .	18
$C_Y$	koeficijent sile u smjeru osi $y$ . . . . .	18
$C_Z$	koeficijent sile u smjeru osi $z$ . . . . .	18
$C$	$\cos(\psi)$ . . . . .	13
$\bar{C}_D$	prosječni koeficijent sile otpora rotora . . . . .	16
$C_{mx}$	koeficijent momenta oko osi $x$ . . . . .	20
$C_{my}$	koeficijent momenta oko osi $y$ . . . . .	20
$C_Q$	koeficijent okretnog momenta . . . . .	20
$C_T$	koeficijent sile potiska . . . . .	20
$D$	sila otpora . . . . .	17
$\mathbf{F}a_h$	vektor aerodinamičkih sila na rotoru za K.S. glave rotora . . . . .	17

$\mathbf{F}a_r$	vektor aerodinamičkih sila na rotoru za K.S. rotora . . . . .	17
$I_b$	inercija mahanja . . . . .	10
$K_\beta$	koeficijent krutsti oprike . . . . .	28
$L$	sila uzgona . . . . .	17
$M_1$	$x$ komponenta vektora aerodinamičke kutne brzine i maseni moment lopatice	10
$M_{y_{ar}}$	aerodinamički moment oko osi $y$ . . . . .	11
$M_{y_i}$	inercijski moment mahanja . . . . .	10
$\bar{m}$	masa po dužini kraka . . . . .	10
$\hat{p}_a$	odnos aerodinamičke kutne brzine rotora i aerodinamičke kutne brzine oko $x$ osi	11
$p_i$	$x$ komponenta vektora inercijalne kutne brzine . . . . .	10
$\hat{q}_a$	odnos aerodinamičke kutne brzine rotora i aerodinamičke kutne brzine oko $y$ osi	11
$q_i$	$y$ komponenta vektora inercijalne kutne brzine . . . . .	10
$w_a$	$z$ komponenta vektora aerodinamičke kutne brzine . . . . .	9
$R$	radius rotora . . . . .	11
$S$	$\sin(\psi)$ . . . . .	13
$T$	sila potiska . . . . .	21
$u_a$	$x$ komponenta vektora aerodinamičke brzine . . . . .	9
$\mathbf{V}_a$	vektor aerodinamičke brzine . . . . .	8
$v_a$	$y$ komponenta vektora aerodinamičke brzine . . . . .	9
$\mathbf{V}_i$	vektor brzine leta, inercijalne brzine . . . . .	8
$V_{Ta}$	brzina vrha kraka . . . . .	11
$\mathbf{V}_{vjetar}$	vektor brzine vjetra . . . . .	8
$\mathbf{V}_w$	vektor inducirane brzine, engl. <i>wash</i> . . . . .	8
$\beta$	kut mahanja . . . . .	10
$\beta_0$	kut konusa . . . . .	13
$\delta_3$	kut delta-3 . . . . .	30
$\gamma$	Lockov broj . . . . .	12
$\lambda_a$	koeficijent aerodinamičke brzine strujanja u osi $z$ . . . . .	12
$\lambda_i$	koeficijent inercijalne brzine strujanja u osi $z$ . . . . .	12
$\lambda_w$	koeficijent inducirane brzine strujanja u osi $z$ . . . . .	12

$\mu$	koeficijent napredovanja . . . . .	11
$\Omega_a$	aerodinamička kutna brzina rotora, razlika kutne brzine rotora i aerodinamičke kutne brzine oko osi z . . . . .	11
$\Omega'$	razlika kutne brzine rotora i inercijalne kutne brzine letjelice oko osi z . . . .	10
$\psi$	kut azimuta . . . . .	11
$\rho$	gustoća zraka . . . . .	11
$\sigma$	koeficijent ispunjenosti kraka . . . . .	18
$\theta_0$	kolektivni postavni kut . . . . .	11
$\theta_T$	kut uvijanja kraka . . . . .	11
$\omega_a$	vektor aerodinamičke kutne brzine . . . . .	9

## Kratice

BET	teorija elementarnog kraka, engl. <i>Blade Element Theory</i> . . . . .	33
IELA	individualni lokalni koordinatni sustav elementa konfiguracije, engl. <i>Individual Element Local Axes</i> . . . . .	6
IERA	individualni referentni koordinatni sustav elementa konfiguracije, engl. <i>Individual Element Reference Axes</i> . . . . .	6
TPP	ravnina vrhova krakova rotora, engl. <i>Tip Path Plane</i> . . . . .	13

# Sažetak

U ovom diplomskom radu je napravljen model helikopterskog rotora zatvorene forme prema Dreier za određivanje sila, momenata i kuteva mahanja u ovisnosti o komandama pilota, brzinama i kutnim brzinama letjelice. Razvijeni model primjenjen je u lebdenju i vertikalnom letu. Numeričko rješenje dobiveno je koristeći programski paket *Octave* za rotor poznatih karakteristika. Rezultati modela su uspoređeni sa rezultatima teorije elementarnog kraka i nekim eksperimentalnim rezultatima. Dat je uvid u neke od bitnih modifikacija helikopterskog rotora i kako one utječu na model.

**Ključne riječi:** helikopter, rotor, matematički model, zatvorena forma, mahanje, koeficijenti sila i momenata

# Summary

In this master's thesis a closed-form helicopter model according to Dreier was made in order to calculate forces, moments and flapping angles in dependence to pilot input, helicopter velocities and angular velocities. The developed model was applied to a helicopter in hover and horizontal flight. The numerical solution was obtained using the *Octave* programming package and applied to a rotor with known specifications. Results were compared to Blade Element Theory and experimental results. A brief insight was given on how different hub types can influence the model.

**Keywords:** helicopter, rotor, mathematical model, closed form, flapping, forces and moments coefficients

# 1 | Uvod

Helikopterski rotor je kao uređaj koji služi funkciju glavnog nosećeg elementa i glavnog potisnog uređaja nedvojbeno najbitniji dio helikoptera te je i njegov proračun od iznimne važnosti. Kako bi se dobile sile, momenti i kutevi mahanja rotora razvijen je veliki broj modela te svaka helikopterska tvrtka ima svoj čuvni model kojemu vjeruje. Model zatvorene forme, ili nekakvi oblici tog modela sa preinakama, se koristi u industriji već dugi niz godina sa dobrim rezultatima [1] [3].

U drugom poglavlju opisan je model rotora, dane su osnovne pretpostavke, najbitnije veličine i korišteni koordinatni sustavi. Objašnjeno je kako se došlo do potrebnih jednadžbi za mahanje, sile i momente, i način rješavanja problema inducirane brzine.

U trećem poglavlju je opisano koje vrste modifikacija rotora mogu utjecati na ovaj model i na koji način te je pokazano kako se usljed tih modifikacija mijenjaju određene jednadžbe.

U četvrtom poglavlju su analizirani rezultati za kuteve mahanja, tri sile i tri momenta na glavi rotora. Rezultati su uspoređeni sa eksperimentalnim i rješenjima teorije elementarnog kraka.



## 2 Opis modela rotora

Matematički gledano modeli zatvorene forme su analitička rješenja jednadžbi, ako je moguće dobiti takvo rješenje. Jednadžbe korištene u ovom proračunu su dobivene integrirajući elementarne doprinose sile uzgona i otpora po azimutnom kutu položaja kraka i po rasponu kraka.

Model korišten u ovom radu detaljno je opisan u [1] pri čemu se za krak razmatra samo gibanje mahanja, odnosno gibanje kraka izvan ravnine rotacije.

### 2.1. Osnovne pretpostavke

Ovdje opisani model predstavlja model jednostavnog artikuliranog rotora. Osnovne pretpostavke o modelu rotora koje su usvojene u ovom radu su:

1. Za mahanje je pretpostavljeno da ima oblik harmoničkog gibanja te je ograničeno na članove prvog reda s konstantnim koeficijentima.
2. Kutevi mahanja su mali. Ukoliko kutevi mahanja premašuju 15 stupnjeva, postoji ozbiljan problem sa rotorom.
3. Zglob mahanja smješten je u osi rotacije rotora.
4. U modelu nije uključeno gibanje kraka u ravnini rotacije (zabacivanje) niti jednostavni model artikuliranog rotora ima zglob zabacivanja.
5. Pretpostavlja se kvazi-stacionarno rješenje kod kojeg se svi prijelazni procesi zanemareni.

6. Zbog jednostavnosti matematičkog modela se koristi uniformna raspodjela inducirane brzine.
7. Pretpostavlja se da su lopatice savršeno krute, savijanja se modeliraju uz pomoć zglobova postavljenih na potrebnim mjestima a torzije nema.
8. Pretpostavljena je jednostavna geometrija lopatice rotora sa konstantnom tetivom, ravnim linijama, bez suženja i bez preinaka na vrhu kraka.
9. Koristi se linearna aerodinamika te se pretpostavljaju mali napadni kutevi a sve azimutne položaje kraka.

Utjecaj drugih konstrukcijskih rješenja i konfiguracija artikuliranog rotora opisan je u poglavlju 3.

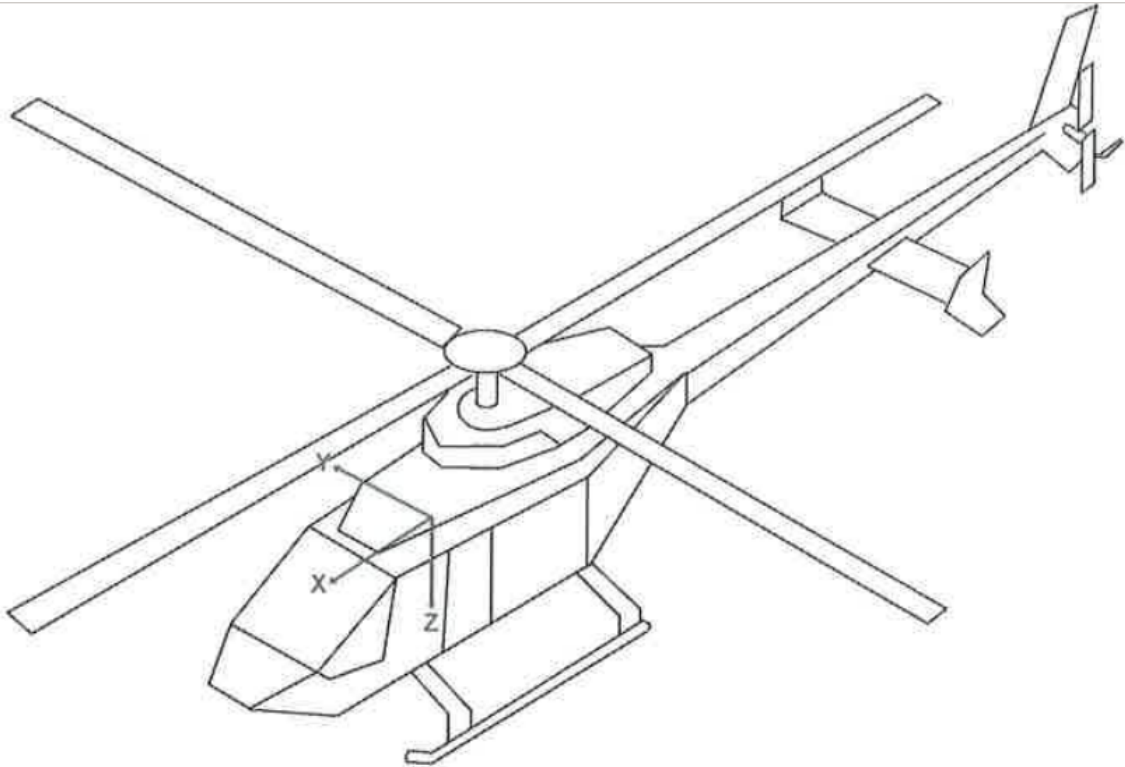
## 2.2. Koordinatni sustavi

Kako bi se jednadžbe za uzgon i otpor mogle primijeniti na lopaticama helikopterskog rotora mora se znati smjer i orijentacija vektora aerodinamičke brzine u odnosu na neki referentni koordinatni sustav. Primijenjene su četiri vrste koordinatnih sustava koje je bitno spomenuti.

Prvi je inercijalni koordinatni sustav na zemlji. Helikopter se giba brzinom leta u odnosu na taj koordinatni sustav i za potrebe proračuna se može smatrati da je zemlja ravna ploha. Pozicija ishodišta ovog koordinatnog sustava je proizvoljna i dok god se ishodište ne mijenja u nekakvoj vremenski ovisnoj simulaciji ovo je dobar referentni koordinatni sustav.

Drugi je koordinatni sustav tijela letjelice (Slika 2.1). Ishodište ovog koordinatnog sustava se nalazi u središtu mase letjelice i ostaje vezan za njega, a ne za neku geometrijsku točku. Osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  osi stvaraju desnokretni sustav pri čemu je s  $x$  u ravnini simetrije (ako se može govoriti o ravnini simetrije kod helikoptera) i usmjerena je prema nosu letjelice, os  $y$  je normalna na ravninu simetrije i usmjerena prema desnom krilu, a os  $z$  je usmjerena prema dolje.

Treći koordinatni sustav je individualni lokalni sustav elementa konfiguracije (IELA, engl. Individual Element Local Axes, Slika 2.2). IELA sustav je paralelan koordinatnom sustavu tijela letjelice, a ishodište mu se nalazi u središtu djelovanja sila i momenata

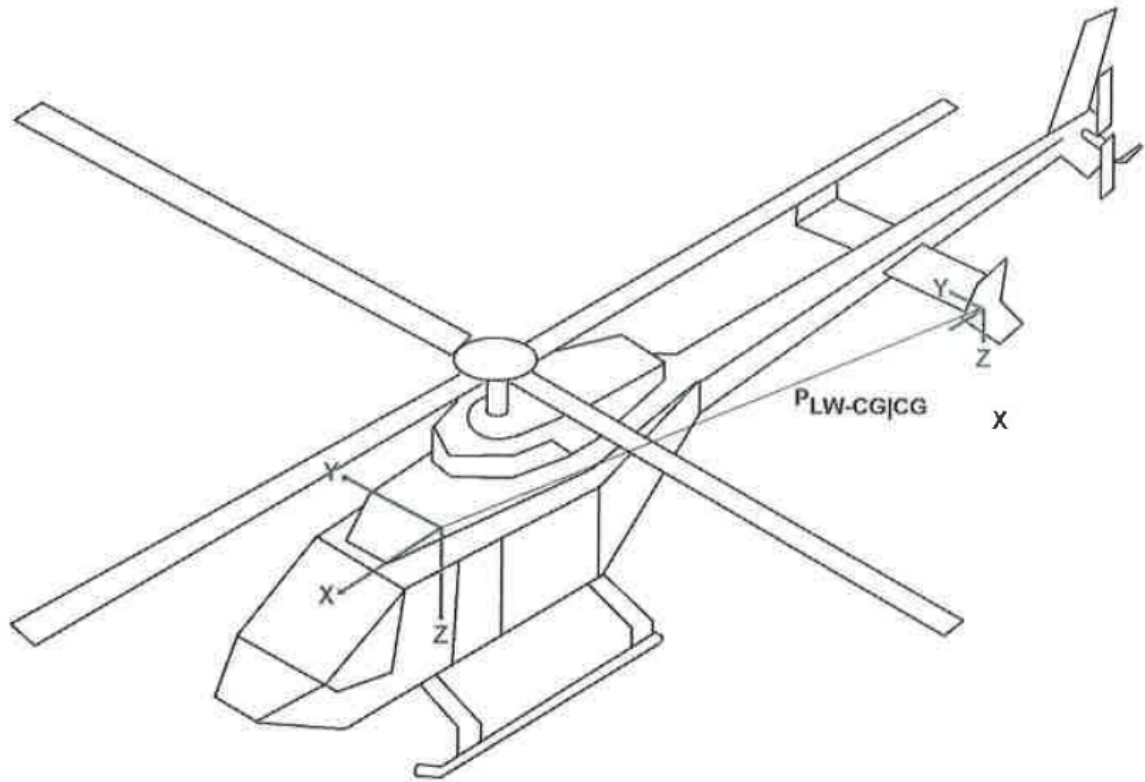


Slika 2.1: Koordinatni sustav tijela letjelice [1]

pojedinih elementa te je udaljeno od ishodišta koordinatnog sustava tijela letjelice za vektor  $\mathbf{p}$ . Vektor  $\mathbf{p}$  se koristi za proračun lokalnih brzina i ubrzanja pojedinih elemenata i pri proračunu djelovanja sila i momenata elementa na ishodište koordinatnog sustava tijela letjelice.

IELA koordinatni sustav koji se koristio u ovom radu je koordinatni sustav glave rotora (s oznakom  $h$ , odnosno *hub*) koji je smješten u ravnini rotacije rotora u osi rotacije, a za jednostavni artikulirani rotor poklapa se sa zglobovom mahanja.

Četvrti koordinatni sustav je individualni referentni sustav elementa konfiguracije (IERA, engl. Individual Element Reference Axes). IERA sustav je koordinatni sustav u kojem je najlakše provesti analizu. IELA i IERA sustavi imaju isto ishodište, tako da je potrebno samo izvršiti rotacije oko pojedinih osi IELA sustava da bi dobili IERA sustav. Slika 2.3 prikazuje primjenu IERA sustava na krilu u vertikalnom položaju. U tom slučaju potrebno je napraviti samo jednu rotaciju oko osi  $x$  IELA sustava da bi dobili sustav u kojem je prikladno napraviti analizu, odnosno čija  $z$  os gleda prema dolje, a  $y$  os prema desnoj strani tog krila.

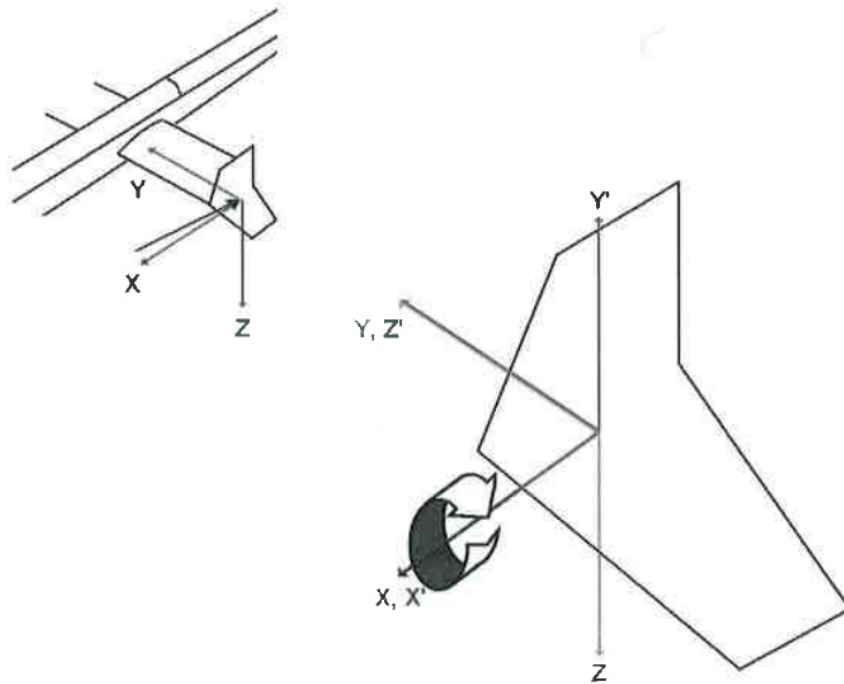


Slika 2.2: IELA koordinatni sustav [1]

IERA koordinatni sustavi korišten u ovom radu je koordinatni sustav rotora (s oznakom  $r$ ) koji je vezan za krak i s njim rotira, a ishodište mu je u osi rotacije, odnosno poklapa se s ishodištem koordinantog sustava glave rotora.

## 2.3. Brzine

Strujanje zraka oko nekog tijela stvara aerodinamičke sile na tom tijelu. Nebitno o tome kreće li se tijelo u struji zraka ili zrak struji oko tijela u mirovanju, struja zraka stvara aerodinamičku silu a naziva se još i aerodinamička brzina. Aerodinamička brzina se može podijeliti na nekoliko komponenti ovisno o gibanju tijela u odnosu na neki fiksni koordinatni sustav, postojanju vjetra i induciranoj brzini. Brzina kojom se tijelo giba u odnosu na neki nepomični koordinatni sustav se naziva brzina leta i označava malim indeksom “i” (od engl. “inertial”). Inducirana brzina nastaje kao rezultat strujanja zraka oko tijela i djeluje u suprotnom smjeru od generirane sile. Zamislimo da sto-



Slika 2.3: IERA koordinatni sustav [1]

jimo iza uključenog ventilatora, povjetarac koji se osjeća iza ventilatora je inducirana brzina, a u suprotnom smjeru djeluje sila potiska koja bi pomicala ventilator u tom smjeru da on stoji na površini s dovoljno malim trenjem. Inducirana brzina se označava malim ondeksom “w” (od engl. “wash”) i suprotnog je smjera od brzine leta. Brzina vjetra se oduzima ili dodaje brzini leta ovisno o smjeru strujanja. Ako je strujanje suprotno smjeru leta onda dodajemo a u suprotnom oduzimamo brzinu vjetra. Vektor aerodinamičke brzine je zbroj vektora ove tri opisane brzine

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_w + \mathbf{V}_{vjetar} . \quad (2.1)$$

Uz vektor aerodinamičke brzine potrebno je promatrati i vektor kutne brzine. Ti

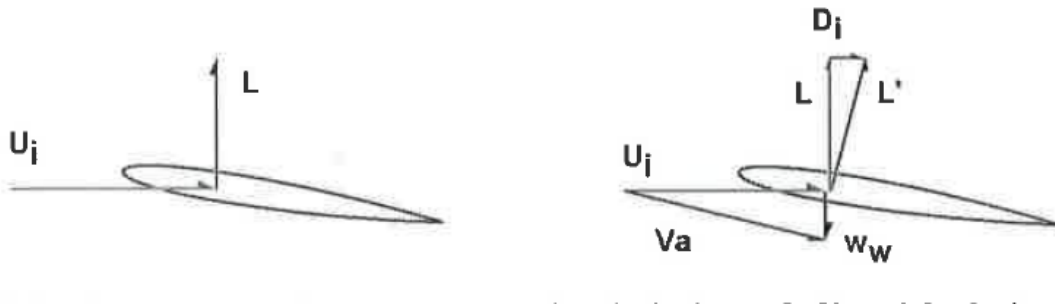
vektori u matricnom zapisu imaju komponente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \omega_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ p_a \\ q_a \\ r_a \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Za intenzitet vektora brzine vrijedi

$$V_a = \sqrt{u_a^2 + v_a^2 + w_a^2},$$

pri čemu je dominira komponenta duž osi  $x$  te je opravdano zanemariti radijalnu komponentu, duž osi  $y$ . Aerodinamička sila je funkcija aerodinamičke brzine, a aerodinamička brzina je funkcija inducirane brzine koja je pak funkcija aerodinamičke sile. Jedan od načina rješavanja ove petlje jest iteracija. Slika 2.4 prikazuje kako inducirana brzina utječe na aerodinamičku brzinu, otpor i uzgon. Inducirana brzina  $w_w$ , uzrokovana silom uzgona, povećava magnitudu aerodinamičke brzine  $V_a$  i smanjuje napadni kut a time i silu uzgona. Nadalje, budući da je sila uzgona definirana kao normala na vektor brzine, mali dio uzgona je usmjeren prema stražnjem dijelu krila što nazivamo inducirani otpor.



Slika 2.4: Razlika sile uzgona određena brzinom leta i aerodinamičkom brzinom [1]

## 2.4. Mahanje

Mahanje predstavlja gibanje kraka u odnosu na ravninu diska, a kut mahanja označen je sa  $\beta$ . Mahanje je nužno kako se helikopter tijekom horizontalnog leta, a zbog neravnomjernosti sile uzgona po disku, ne bi prevrnuo u jednu stranu. Na mahanje utječu

komanda pilota, masa letjelice, odnosno sila potiska, brzina leta i kutne brzine letjelice i vrsta rotora.

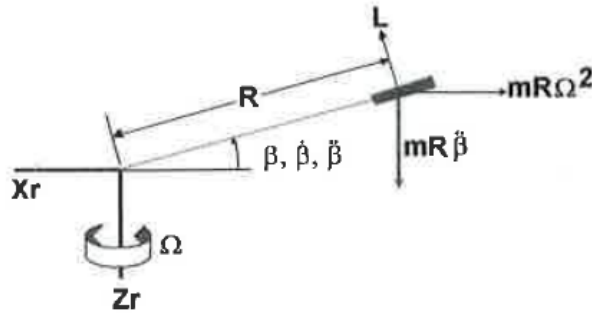
Matematički model rotora se može podijeliti na dinamičko i aerodinamički dio, gdje se dinamička analiza provodi bez utjecaja atmosfere, a aerodinamička bez utjecaja inercijalnih karakteristike rotora. Dinamičkom analizom rotora moguće je dobiti inercijske sile momente na rotoru. Slika 2.5 prikazuje inercijalne sile i kut mahanja u IERA koordinatnom sustavu rotora, koji se vrti zajedno sa rotorom. Moment inercijalnih sila oko osi  $y$ ,  $M_{yi}$ , naziva se i inercijalni moment mahanja i ovisi o kutu mahanja, kutnoj brzini i kutnom ubrzanju mahanja:

$$M_{yi} = I_b \left[ \omega_n^2 \beta + \ddot{\beta} - \dot{p}_i S + 2q_i \Omega' S - \dot{q}_i C - 2p_i \Omega' C \right] + M_1 [\beta a_x C - \beta a_y S - a_z] , \quad (2.3)$$

gdje je  $I_b$  je moment inercije mahanja za krak rotora, a  $\bar{m}$  je masa po dužini kraka

$$I_b = \int_0^R s^2 (\bar{m}) ds , \quad (2.4)$$

$$M_1 = \int_0^R s (\bar{m}) ds .$$



Slika 2.5: Rotirajući koordinatni sustav rotora s prikazom kuta mahanja kraka i sila koje su razmatrane za element kraka [1]

Aerodinamičkom analizom se dobivaju sile i momenti na rotoru kao posljedica strujanja zraka. Integracijom aerodinamičkog momenta oko osi  $y$ ,  $M_{ya_r}$ , po duljini kraka do efektivnog vrha  $B_T$  ( $B_T$  se još naziva i koeficijent gubitaka na vrhu kraka i obično

se uzima da iznosi 0.97) dobijemo moment oko osi  $y$  ovisan o azimutnom kutu položaja kraka  $\psi$  (definiran na slici 3.1), odnosno

$$M_{y_{ar}} = \frac{1}{2} \rho V_{Ta}^2 R^2 c a_0 \cdot \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{2\mu B_T^3 S}{3} + \frac{\mu^2 B_T^2 S^2}{2} \right) \Theta_0 \\ & + \left( \frac{B_T^5}{5} + \frac{2\mu B_T^4 S}{4} + \frac{\mu^2 B_T^3 S^2}{3} \right) \Theta_T \\ & + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{2\mu B_T^3 S}{3} + \frac{\mu^2 B_T^2 S^2}{2} \right) A_1 C \\ & + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{2\mu B_T^3 S}{3} + \frac{\mu^2 B_T^2 S^2}{2} \right) B_1 S \\ & - \left( \frac{B_T^3}{3} + \frac{\mu B_T^2 S}{2} \right) (1 + \epsilon_0) (\mu \beta C - \lambda_a) \\ & - \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{\mu B_T^3 S}{3} \right) (1 + \epsilon_0) \left( \frac{\dot{\beta}}{\Omega_a} \right) \\ & + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{\mu B_T^3 S}{3} \right) (1 + \epsilon_0) \hat{p}_a S \\ & + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{\mu B_T^3 S}{3} \right) (1 + \epsilon_0) \hat{q}_a C \end{aligned} \right]. \quad (2.5)$$

Pri tome  $A_1$  i  $B_1$  predstavljaju bočni i uzdužni ciklički postavni kut koji zajedno sa  $\theta_0$  i  $\theta_T$  daju postavni kut lokalnog presjeka kraka ovisan o azimutu

$$\theta = \theta_0 + \theta_T x + A_1 \cos(\psi) + B_1 \sin(\psi). \quad (2.6)$$

Zbroj aerodinamičkog momenta (2.5) i inercijskog momenta (2.3) oko osi  $y$  mora biti jednak nuli. Ako se definira Lock-ov broj (Lockov broj predstavlja relativni utjecaj aerodinamičkih sila naspram inercijskim silama)

$$\gamma = \frac{\rho C a_0 R^4}{I_b}, \quad (2.7)$$



te se nakon sređivanja dobiva klasičnu jednadžbu mahanja:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\beta} + \frac{\gamma\Omega_a^2}{2} \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{\mu B_T^3 S}{3} \right) (1 + \epsilon_0) \frac{\dot{\beta}}{\Omega_a} \\
& + \left[ \omega^2 + \frac{\gamma\Omega_a^2}{2} \left( \frac{B_T^3}{3} + \frac{\mu B_T^2 S}{2} \right) (1 + \epsilon_0) \mu C + \frac{M_1}{I_b} (a_x C - a_y S) \right] \beta \\
& = \frac{\gamma\Omega_a^2}{2} \left[ \begin{aligned}
& \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{2\mu B_T^3 S}{3} + \frac{\mu^2 B_T^2 S^2}{2} \right) \Theta_0 \\
& + \left( \frac{B_T^5}{5} + \frac{2\mu B_T^4 S}{4} + \frac{\mu^2 B_T^3 S^2}{3} \right) \Theta_T \\
& + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{2\mu B_T^3 S}{3} + \frac{\mu^2 B_T^2 S^2}{2} \right) A_1 C \\
& + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{2\mu B_T^3 S}{3} + \frac{\mu^2 B_T^2 S^2}{2} \right) B_1 S \\
& + \left( \frac{B_T^3}{3} + \frac{\mu B_T^2 S}{2} \right) (1 + \epsilon_0) \lambda_a \\
& + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{\mu B_T^3 S}{3} \right) (1 + \epsilon_0) \hat{p}_a S \\
& + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{\mu B_T^3 S}{3} \right) (1 + \epsilon_0) \hat{q}_a C
\end{aligned} \right] \\
& + \dot{p}_i S - 2q_i \Omega' S + \dot{q}_i C + 2p_i \Omega' C + \frac{M_1}{I_b} a_z .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Jedan od načina rješavanja ove jednadžbe je kvazi-stacionarnom metodom u kojoj se predloži oblik rješenja koji se stavi u jednadžbu i rezultat, nakon integracije po azimutu, podijeli na nekoliko algebarskih jednadžbi. Rješenje uključuje četiri pretpostavke:

1. Krak maše jednostavnim harmoničkim gibanjem i to samo s prvim harmonicima.
2. Koeficijenti koji opisuju harmonike su konstante.
3. Sustav radi na visokim frekvencijama i s velikim prigušenjem te se prijelazni procesi mogu zanemariti.
4. Periodički koeficijenti harmoničkog gibanja mahanja ne utječu značajno na stabilnost sustava.

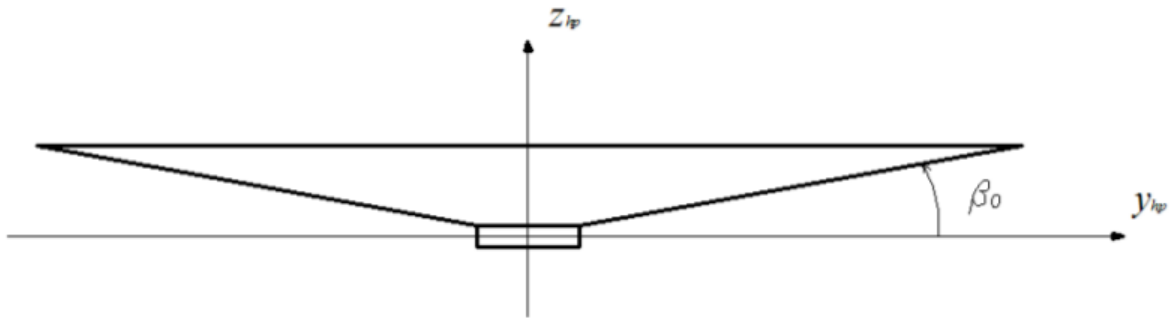
Ove pretpostavke su utjelovljene u predloženom obliku rješenja, odnosno jednadžbama za mahanje:

$$\beta = \beta_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi , \tag{2.9}$$

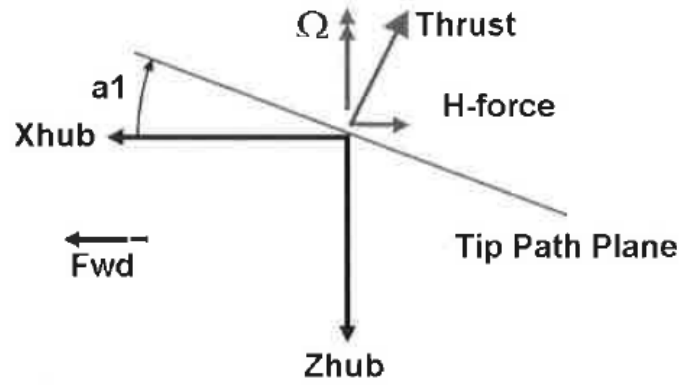
odnosno kraće zapisano koristeći oznake  $C = \cos \psi$  i  $S = \sin \psi$ :

$$\begin{aligned}
 \beta &= \beta_0 - a_1 C - b_1 S \\
 \dot{\beta} &= (a_1 S - b_1 C) \frac{d\psi}{dt} = (a_1 S - b_1 C) \Omega' \\
 \ddot{\beta} &= (a_1 C - b_1 S) (\Omega')^2 \\
 S^2 &= \frac{1}{2} - \frac{C_2}{2} \\
 C^2 &= \frac{1}{2} + \frac{C_2}{2} \\
 SC &= \frac{1}{2} S_2 \\
 S^2 C &= \frac{C}{4} - \frac{C_3}{4} \\
 SC^2 &= \frac{S}{4} + \frac{S_3}{4} \\
 S^3 &= \frac{3S}{4} - \frac{S_3}{4}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

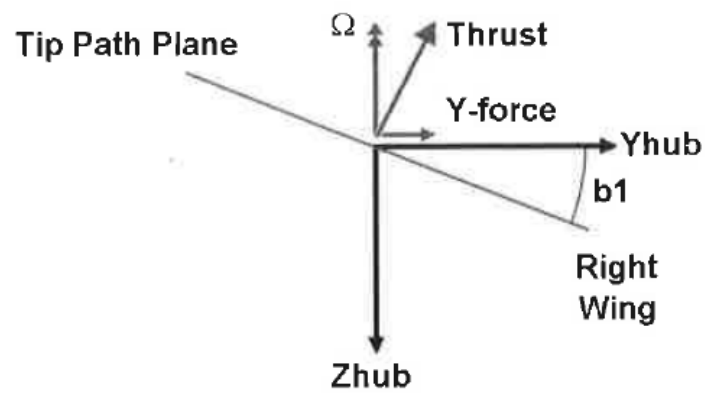
Kut konusa,  $\beta_0$ , uzdužni ciklični kut mahanja,  $a_1$ , i bočni ciklični kut mahanja,  $b_1$ , su tri tražene konstante (Slike 2.6 do 2.8. Ravnina TPP (engl tip path plane), je ravnina koju stvaraju vrhovi krakova tijekom rotacije).



Slika 2.6: Kut konusa [2]



Slika 2.7: Prikaz TPP-a sa lijeve strane i  $a_1$  [1]



Slika 2.8: Prikaz TPP-a sa stražnje strane i  $b_1$  [1]

Ako se jednađbe 2.10 uvrste u jednađbu 2.8, pod pretpostavkom da su ubrzanja glavčine rotora jednaka nuli, dobiju se jednađbe za kut konusa, uzdužni i ciklični kut mahanja:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}F_0 & \frac{\gamma}{2}F_T & 0 & \frac{\gamma}{2}F_{B_1} \\ \frac{A_0}{A_{a_1}} & \frac{A_T}{A_{a_1}} & 0 & \frac{A_{B_1}}{A_{a_1}} \\ \frac{\gamma}{2}\frac{B_{\beta_0}}{B_{b_1}}F_0 & \frac{\gamma}{2}\frac{B_{\beta_0}}{B_{b_1}}F_T & -\frac{B_{A_1}}{B_{b_1}} & \frac{\gamma}{2}\frac{B_{\beta_0}}{B_{b_1}}F_{B_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \theta_t \\ A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}F_\lambda & \frac{\gamma}{2}F_P & 0 \\ \frac{A_\lambda}{A_{a_1}} & \frac{A_P}{A_{a_1}} & 0 \\ \frac{\gamma}{2}\frac{B_{\beta_0}}{B_{b_1}}F_\lambda & \frac{\gamma}{2}\frac{B_{\beta_0}}{B_{b_1}}F_P & -\frac{B_q}{B_{b_1}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_a \\ \hat{p}_a \\ \hat{q}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\gamma A_{a_1}} \\ -\frac{4}{\gamma B_{b_1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{p}_i \\ \hat{q}_i \end{Bmatrix}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Koeficijenti jednađbe (2.11) se definiraju ovako:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{B_T^2 \mu^2}{4} \right) & F_T &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^5}{5} + \frac{B_T^3 \mu^2}{6} \right) \\
 F_\lambda &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^3}{3} \right) (1 + \epsilon_0) & F_{B_1} &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^3 \mu}{3} \right) \\
 F_P &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^3 \mu}{6} \right) (1 + \epsilon_0) & F_{a_1} &= F_\Omega^2 \left( \frac{\mu B_T^3}{6 F_\Omega} \right) (1 + \epsilon_0) (1 - F_\Omega)
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= F_\Omega^2 \left( \frac{2B_T^3 \mu}{3} \right) & A_T &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^4 \mu}{2} \right) \\
 A_\lambda &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^2 \mu}{2} - \left\langle \frac{\mu^3}{8} \right\rangle \right) (1 + \epsilon_0) & A_{B_1} &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{3B_T^2 \mu^2}{8} \right) \\
 A_P &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^4}{4} \right) (1 + \epsilon_0) & A_{a_1} &= F_\Omega^2 \left( \frac{B_T^4}{4 F_\Omega} - \frac{B_T^2 \mu^2}{8} \right) (1 + \epsilon_0)
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 B_{\beta 0} &= F_{\Omega}^2 \left( \frac{B_T^3 \mu}{3} \right) (1 + \epsilon_0) & B_{A_1} &= F_{\Omega}^2 \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{B_T^2 \mu^2}{8} \right) \\
 B_q &= F_{\Omega}^2 \left( \frac{B_T^4}{4} \right) (1 + \epsilon_0) & B_{b_1} &= F_{\Omega}^2 \left( \frac{B_T^4}{4F_{\Omega}} + \frac{B_T^2 \mu^2}{8} \right) (1 + \epsilon_0)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\Omega} &= \frac{\Omega_a}{\Omega'} \\
 \hat{p}_i &= \frac{p_i}{\Omega'} \\
 \hat{q}_i &= \frac{q_i}{\Omega'}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_a &= \Omega - r_a \\
 \Omega' &= \Omega - r_i
 \end{aligned}$$

$$\lambda_a = \frac{w_a}{V_{Ta}}, \quad \mu = \frac{u_i}{V_{Ta}}, \quad V_{Ta} = \Omega_a R \tag{2.16}$$

$$\epsilon_0 = \frac{\bar{C}_D}{a_0}. \tag{2.17}$$

## 2.5. Sile i momenti

Sile i momenti na osovini rotora se dobivaju tako što se elementarni doprinosi uzgona i otpora, dobiveni za koordinatni sustav rotora,

$$d\mathbf{F}_{a_r} = \begin{pmatrix} \beta dL \\ -dD + \phi dL \\ -\phi dD - dL \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

prenesu matricama transformacije na koordinatni sustav glave rotora,

$$d\mathbf{F}a_h = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta dL \\ -dD + \phi dL \\ -\phi dD - dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta C + \phi S) dL - (S) dD \\ (\phi C + \beta S) dL - (C) dD \\ -\phi dD - dL \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

U njih se uvrštava jednadžbe za uzgon, otpor, mahanje i kut nagiba struje:

$$dL = \frac{1}{2} \rho V_{Ta}^2 R c a_0 (\mu S + x)^2 \left[ \theta_0 + \theta_T x + A_1 C + B_1 S + \left( \frac{-\mu \beta C + \lambda_a - x(\dot{\beta}/\Omega_a) + x \hat{p}_a S + x \hat{q}_a C}{\mu S + x} \right) \right] dx, \quad (2.20)$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho V_{Ta}^2 R c a_0 (\mu S + x)^2 \epsilon_0 dx, \quad (2.21)$$

$$\phi = \frac{[-\mu \beta C + \lambda_a - x(\dot{\beta}/\Omega_a) + x \hat{p}_a S + x \hat{q}_a C]}{(\mu S + x)}, \quad (2.22)$$

te ih integrira po azimutnom kutu i po radijusu i pomnoži sa brojem lopatica. Dobivene jednadžbe

$$\frac{2C_x}{\sigma a_0} = \left\{ \begin{aligned} & - \left( \frac{B_T^2 \mu}{2} \right) \epsilon_0 + \left( \frac{B_T \mu}{2} \lambda_a - \frac{B_T^3}{3} a_1 \right) \theta_0 \\ & + \left( \frac{B_T^2 \mu}{4} \lambda_a - \frac{B_T^4}{4} a_1 \right) \theta_T + \left( \frac{B_T^3}{6} \beta_0 \right) (A_1 + b_1) \\ & + \left( \frac{B_T^2}{4} \lambda_a - \frac{B_T^2 \mu}{4} a_1 \right) B_1 - \frac{3B_T^2}{4} \lambda_a a_1 - \frac{B_T^2}{4} (\beta_0^2 + a_1^2) \mu \\ & + \left( \frac{B_T^3}{6} \theta_0 + \frac{B_T^4}{8} \theta_T + \frac{B_T^2}{2} \lambda_a + \frac{3B_T^2 \mu}{16} B_1 + \frac{B_T^2 \mu}{16} a_1 \right) \hat{p}_a \\ & + \left( \frac{B_T^3}{6} \beta_0 + \frac{B_T^2 \mu}{16} A_1 + \frac{B_T^2 \mu}{16} B_1 \right) \hat{q}_a \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$$\frac{2C_y}{\sigma a_0} = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \left( \frac{B_T^3}{3} + \frac{B_T \mu^2}{2} \right) b_1 - \frac{3B_T^2 \mu}{4} \beta_0 \right] \theta_0 \\ & + \left[ \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{B_T^2 \mu^2}{4} \right) b_1 - \frac{B_T^3 \mu}{2} \beta_0 \right] \theta_T \\ & + \left( \frac{B_T^2}{4} \lambda_a + \frac{B_T^2 \mu}{4} a_1 \right) A_1 \\ & + \left[ - \left( \frac{B_T^3}{6} + \frac{B_T \mu^2}{2} \right) \beta_0 + \frac{B_T^2 \mu}{2} b_1 \right] B_1 \\ & + \left( \frac{3B_T^2}{4} b_1 - \frac{3B_T \mu}{2} \beta_0 \right) \lambda_a \\ & + \left( + \frac{B_T^3}{6} \beta_0 + \frac{B_T^2 \mu}{4} b_1 - B_T \mu^2 \beta_0 \right) a_1 \\ & + \left( + \frac{B_T^2 \mu}{16} A_1 - \frac{B_T^3}{6} \beta_0 + \frac{5B_T^2 \mu}{16} b_1 \right) \hat{p}_a \\ & + \left( \frac{B_T^3}{6} \theta_0 + \frac{B_T^4}{8} \theta_T + \frac{B_T^2}{2} \lambda_a + \frac{B_T^2 \mu}{16} B_1 + \frac{7B_T^2 \mu}{16} a_1 \right) \hat{q}_a \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$\frac{2C_z}{\sigma a_0} = - \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{B_T^3}{3} + \frac{B_T \mu^2}{2} \right) \theta_0 + \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{B_T^2 \mu^2}{4} \right) \theta_T \\ & + \left( \frac{B_T^2}{2} + \left\langle \frac{\mu^2}{4} \right\rangle \right) (1 + \epsilon_0) \lambda_a + \left( \frac{B_T^2 \mu}{2} + \left\langle \frac{\mu^3}{8} \right\rangle \right) B_1 \\ & + \left( \frac{B_T^2 \mu}{4} (1 + \epsilon_0) \right) \hat{p}_a \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

su koeficijenti sila po  $x$ ,  $y$  i  $z$  osi gdje je  $\sigma = bc/\pi R$  i zove se još koeficijent ispunjenosti kraka.

Koeficijenti momenata oko  $x$  i  $y$  su

$$C_{mx} = \frac{\sigma a_0}{2} \left\{ \begin{aligned} & - \left( \frac{B_T^3 \mu}{3} \right) \theta_0 - \left( \frac{B_T^4 \mu}{4} \right) \theta_T - \left( \frac{B_T^2 \mu}{4} \right) \lambda_a - \left( \frac{B_T^4}{8} \right) \hat{p}_a \\ & - \left( \frac{B_T^4}{8} + \frac{3B_T^2 \mu^2}{16} \right) B_1 + \left( \frac{B_T^4}{8} - \frac{B_T^2 \mu^2}{16} \right) a_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

$$C_{my} = \frac{\sigma a_0}{2} \left\{ \left( \frac{B_T^3 \mu}{6} \right) \beta_0 - \left( \frac{B_T^4}{8} \right) \hat{q}_a - \left( \frac{B_T^4}{8} + \frac{B_T^2 \mu^2}{16} \right) A_1 - \left( \frac{B_T^4}{8} + \frac{B_T^2 \mu^2}{16} \right) b_1 \right\} \quad (2.27)$$

Koeficijent oko osi  $z$ , odnosno okretnog momenta, je radi jednostavnosti podjeljen na tri dijela:

1.

$$C_{Q_0} = \frac{\sigma a_0}{2} \left\{ \begin{aligned} &Q_\epsilon \epsilon_0 - Q_\lambda \lambda_a - Q_{\beta_0^2} \beta_0^2 - Q_{a_1^2} a_1^2 - Q_{b_1^2} b_1^2 \\ &+ Q_{\beta_0 b_1} \beta_0 b_1 - Q_{a_1 \lambda} a_1 \lambda_a \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

gdje su

$$\begin{aligned} Q_\epsilon &= \left( \frac{B_T^4}{4} + \frac{B_T^2 \mu^2}{4} \right) & Q_{\lambda_a} &= \left( \frac{B_T^3}{3} \right) \theta_0 + \left( \frac{B_T^4}{4} \right) \theta_T + \left( \frac{B_T^2}{2} \right) \lambda_a \\ Q_{\beta_0^2} &= \left( \frac{B_T^2 \mu^2}{4} \right) & Q_{a_1^2} &= \left( \frac{B_T^4}{8} + \frac{3B_T^2 \mu^2}{16} \right) \\ Q_{b_1^2} &= \left( \frac{B_T^4}{8} + \frac{B_T^2 \mu^2}{16} \right) & Q_{\beta_0 b_1} &= \left( \frac{B_T^3 \mu}{3} \right) \\ Q_{a_1 \lambda} &= \left( \frac{B_T^2 \mu}{2} \right) ; \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.

$$C_{Q_c} = \frac{\sigma a_0}{2} \{ Q_{B_1 a_1} B_1 a_1 - Q_{B_1 \lambda} B_1 \lambda + Q_{A_1 \beta_0} A_1 \beta_0 - Q_{A_1 b_1} A_1 b_1 \} \quad (2.30)$$



gdje su

$$\begin{aligned} Q_{B_1 a_1} &= \left( \frac{B_T^4}{8} - \frac{B_T^2 \mu^2}{16} \right) & Q_{B_1 \lambda} &= \left( \frac{B_T^2 \mu}{4} \right) \\ Q_{A_1 \beta_0} &= \left( \frac{B_T^3 \mu}{6} \right) & Q_{A_1 b_1} &= \left( \frac{B_T^4}{8} + \frac{B_T^2 \mu^2}{16} \right); \end{aligned} \quad (2.31)$$

3.

$$C_{Qpq} = \frac{\sigma a_0}{2} \{Q_p \hat{p}_a + Q_q \hat{q}_a\} \quad (2.32)$$

gdje su

$$\begin{aligned} Q_p &= \left( -\frac{B_T^4}{8} B_1 - \frac{B_T^3 \mu}{6} \theta_0 - \frac{B_T^4 \mu}{8} \theta_T - \frac{B_T^4}{8} \hat{p}_a + \frac{B_T^4}{4} a_1 \right) \\ Q_q &= \left( -\frac{B_T^4}{8} A_1 + \frac{B_T^3 \mu}{3} \beta_0 - \frac{B_T^4}{8} \hat{q}_a - \frac{B_T^4}{4} b_1 \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

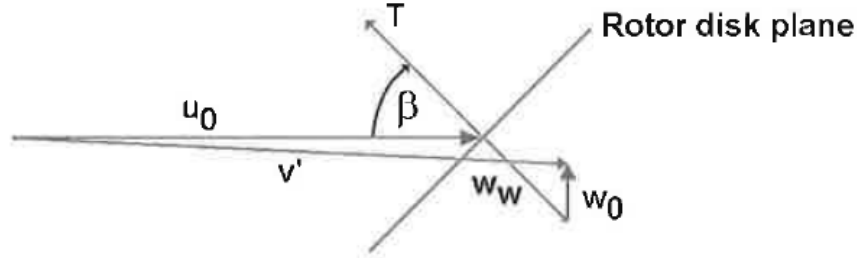
Ukupni koeficijent okretnog momenta je zbroj ova tri dijela

$$C_Q = C_{Q0} + C_{Qc} + C_{Qpq}.$$

## 2.6. Problem inducirane brzine

Problem kod računanja sile potiska je što koeficijent induciane brzine, odnosno inducirana brzina, nije konstantan. Inducirana brzina je funkcija sile potiska, horizontalne i vertikalne brzine a sila potiska je funkcija inducirane brzine. Slika 2.9 prikazuje disk pod napadnim kutem sa horizontalnim i vertikalnim brzinama za koji je sila potiska

$$T = 2\rho A V' w_w. \quad (2.34)$$



Slika 2.9: Disk rotora pod napadnim kutom [1]

Obično je potrebno napraviti iterativnu analizu kako bi se dobilo rješenje (osim za slučaj lebdenja kada je inducirana brzina samo  $w_w = \sqrt{T/2\rho A}$ ). Postoji nekoliko iterativnih metoda, svaki sa prednostima i nedostacima, a ovdje je korištena metoda bisekcije.

Metoda bisekcija funkcionira tako što jednađbe za induciranu brzinu/potisak preuredi na način da se nigdje ne koriste razlomci. U ovom slučaju to je riješeno tako što je napravljen funkcional koji preuređuje jednađbe u sustav bez razlomaka. Originalni sustav ima oblik

$$C_T = \frac{\sigma a_0}{2} [T_0 \theta_0 + \dots + T_\lambda (\lambda_i - \lambda_w)]$$

$$\lambda_w = \frac{C_T}{2(\mu_a^2 + (\lambda_i - \lambda_w)^2)^{1/2}}, \quad (2.35)$$

a preuređen sustav je

$$F(\lambda_w) = \left\{ \begin{array}{l} C_T = \frac{\sigma a_0}{2} [T_0 \theta_0 + \dots + T_\lambda (\lambda_0 - \lambda_w)] \\ f(\lambda_w) = 2\lambda_w [\mu_a^2 + (\lambda_0 - \lambda_w)^2]^{1/2} - C_T \end{array} \right\}, \quad (2.36)$$

gdje se desna strana jednađbe za  $C_T$  zamjeni desnom stranom jednađbe 2.25 pomnoženoj sa  $(-\frac{\sigma a_0}{2})$ . Funkcional  $F(\lambda_w)$  preuzima vrijednost druge jednađbe, odnosno funkcije  $f(\lambda_w)$ . Sama metoda bisekcije primijenjena je na sljedeći način:

1. Postavi se maksimalan broj iteracija u petlji.

2. Izabere se najveća lijeva, odnosno najveća negativna vrijednost za  $\lambda_w$ , nazove  $\lambda_L$  i proračuna funkciju za tu vrijednost. Rješenje nazovemo  $F_L$ .
3. Izabere se najveća desna, odnosno najveća pozitivna vrijednost za  $\lambda_w$ , nazove  $\lambda_R$  i proračuna funkciju za tu vrijednost. Rješenje nazovemo  $F_R$ .
4.  $F_L$  i  $F_R$  moraju imati različite predznake, ukoliko nemaju potrebno je promijeniti vrijednosti za  $\lambda_L$  i/ili  $\lambda_R$ . Nije moguće znati unaprijed hoće li predznaci biti različiti, ali u većini slučajeva ukoliko se postavi da je  $\lambda_R = 20\lambda_{Lebdenje}$  i  $\lambda_L = -\lambda_R$  predznaci će biti različiti.
5. Pronađe se srednja vrijednost za  $\lambda_w$ , nazove  $\lambda_M = (\lambda_L + \lambda_R)/2$ , i proračuna funkciju za tu vrijednost. Rješenje nazovemo  $F_M$ .
6. Ukoliko je  $F_M = 0$ , ili blizu, možemo ostaviti  $\lambda_w = \lambda_M$ . Ako broj iteracije dostigne maksimum, napuštamo rutinu sa  $\lambda_w = \lambda_M$  kao traženom vrijednosti. Ukoliko ni jedan uvjet nije ispunjen ide se na sljedeći korak
7.  $F_M$  je različit od nule. Usporede se predznaci  $F_M$  i  $F_L$  i ako su isti ide se na korak 8, ako nisu na korak 9.
8. Rješenje leži između  $F_M$  i  $F_R$ . Postavi se da je  $\lambda_L \leftarrow \lambda_M$ , ide na sljedeću iteraciju i natrag na korak 5.
9. Rješenje leži između  $F_L$  i  $F_M$ . Postavi se da je  $\lambda_R \leftarrow \lambda_M$ , ide na sljedeću iteraciju i natrag na korak 5.

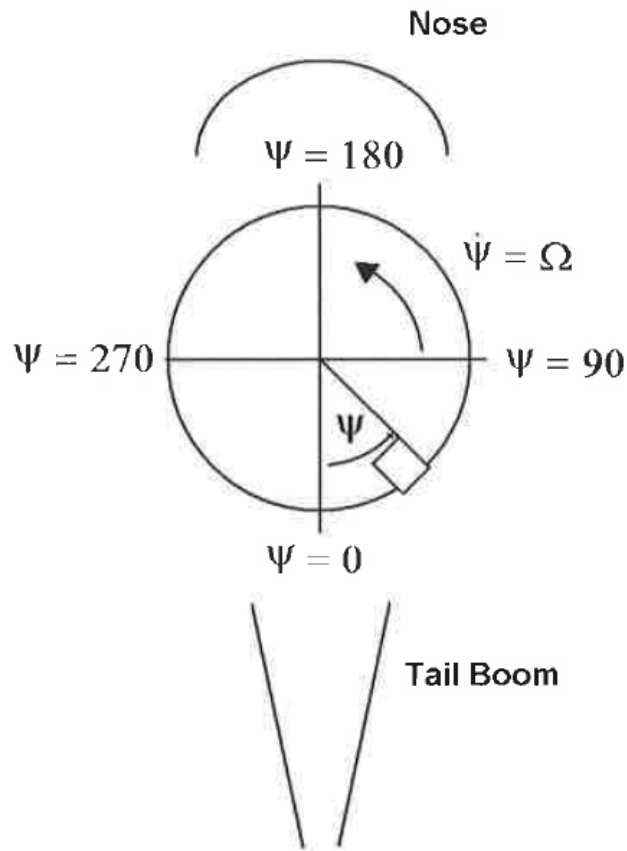
Osnovna prednost ove metode je što je izbjegnuto dijeljenje sa nulom. Nedostatak je taj što se moraju dobro postaviti početni uvjeti.

## 3 Vrste artikuliranih rotora

### 3.1. Osnovna geometrija

Kako IERA sustav može biti vezan i za krak rotora potrebno je u svakom trenutku znati kut azimuta, napadni kut, kut mahanja, kut uvijanja i ostale geometrijske karakteristike helikopterskog rotora. Kut azimuta  $\psi$  daje informaciju gdje se krak u određenom trenutku nalazi u ravnini rotacije (Slika 3.1). Nulti azimutni kut se definira kada krak gleda prema repu helikoptera. Budući da je u horizontalnom letu kut mahanja ovisan o položaju kraka, odnosno kutu azimuta, ovo je vrlo važan podatak. Postavni kut označavamo sa  $\Theta$ . To je kut nagiba profila u odnosu na ravninu diska a postavlja ga pilot kolektivnom komandom na palici. Kut uvijanja,  $\Theta_T$ , je obično mali kut i predstavlja razliku postavnog kuta profila na vrhu i u korijenu kraka (Slika 3.2). Kut uvijanja je uobičajeno linearno promjenjiv cijelom dužinom kraka. Kut mahanja,  $\beta$ , predstavlja kut kraka i ravnine rotacije rotora te opisuje njegovo izdizanje iz ravnine rotacije (Slika 3.3).

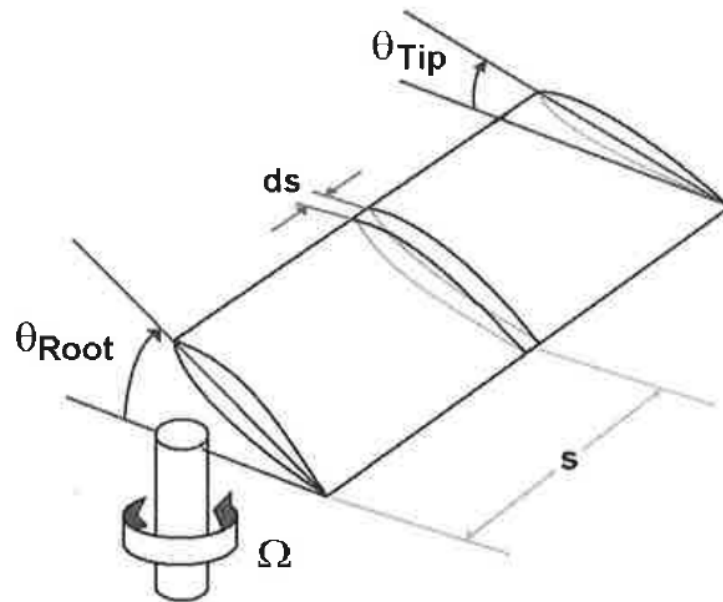
Izračun kuta mahanja prezentiran u prethodnom poglavlju napravljen je pod pretpostavkom jednostavnog artikuliranog rotora no kako dinamika rotora i jednadžbe mahanja ovise i o tome na koji način je krak spojen za glavčinu rotora, često se koriste druge vrste rotora kako bi se ostvario moment na osovini glave rotora i kako bi se utjecalo na dinamiku mahanja.



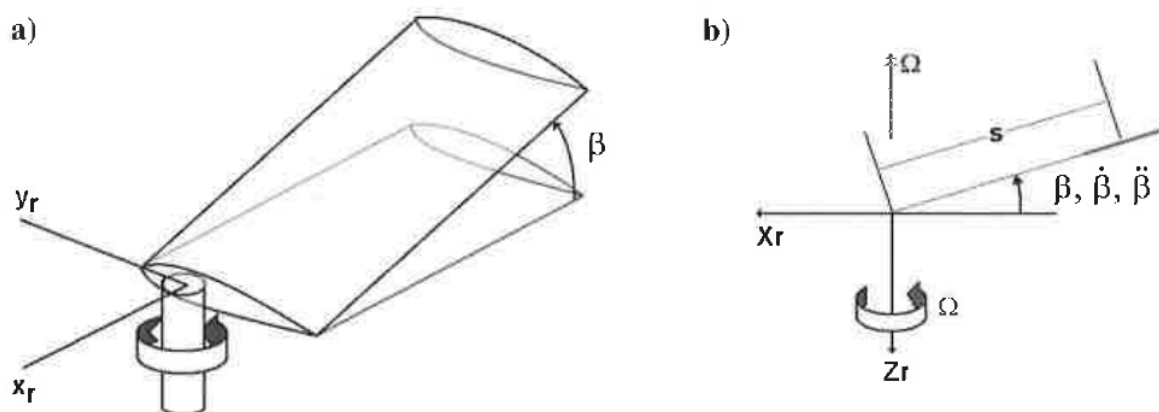
Slika 3.1: Prikaz azimuta sa smjerom vrtnje rotora gledano s gornje strane helikoptera [1]

### 3.2. Jednostavni artikulirani rotor

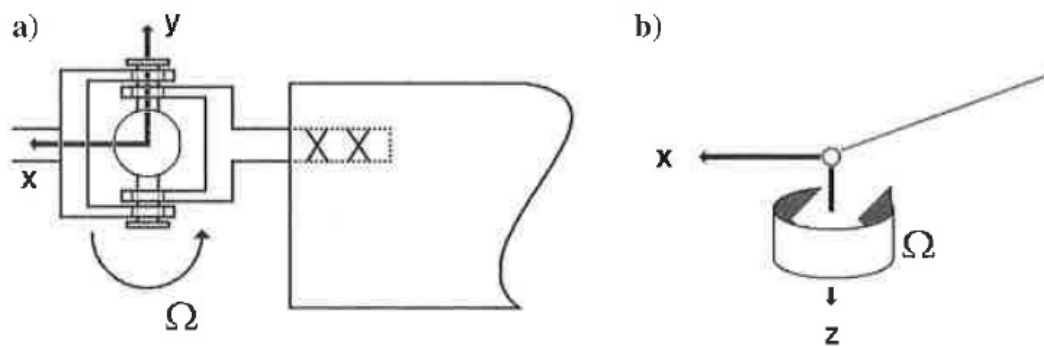
Jednostavni artukulirani rotor predstavlja temeljni način spajanja kraka i glave rotora (Slika 3.4) za koji se pretpostavlja da se zglobovi mahanja nalaze u središtu vrtnje, a gibanje jednog kraka ne utječe na gibanje drugih krakova. Kada bi se ovakvoj konfiguraciji dodao još zglobovi zabacivanja dobio bi se potpuno artikulirani rotor (Slika 3.5).



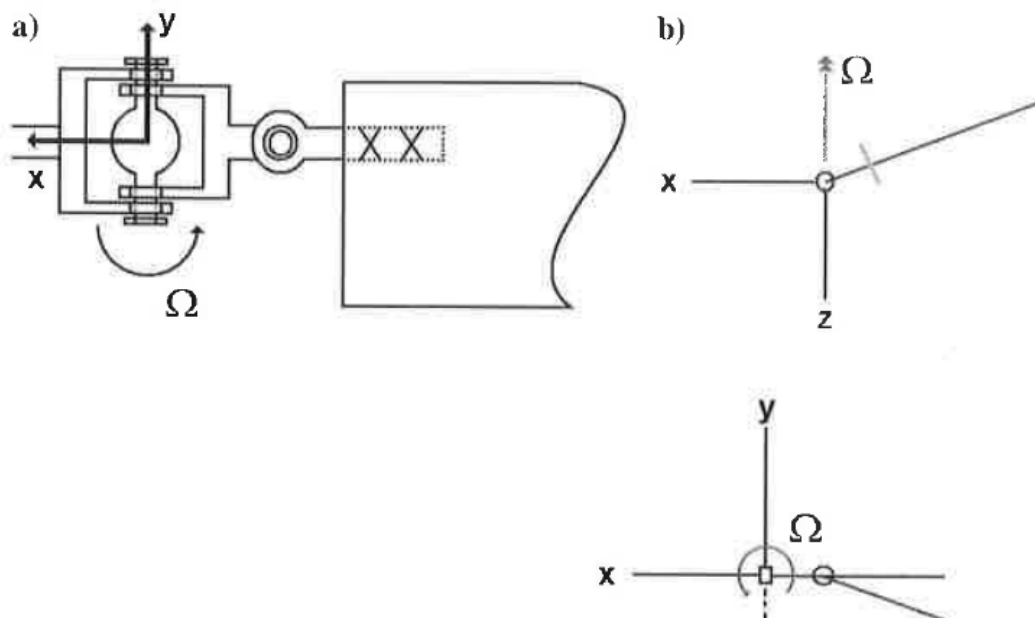
Slika 3.2: Razlika nagiba profila u vrhu i korijenu kraka [1]



Slika 3.3: Prikaz kuta mahanja [1]



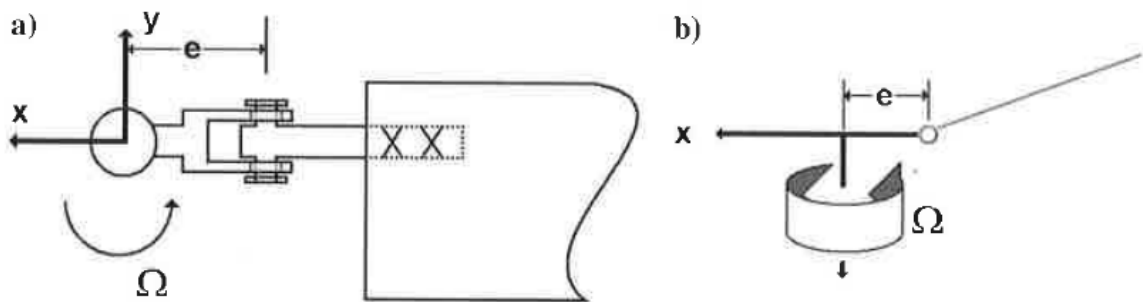
Slika 3.4: Artikulirani rotor [1]



Slika 3.5: Potpuno artikulirani rotor [1]

### 3.3. Artikulirani rotor sa pomaknutim zglobov mahanja

Ova konfiguracija je identična artikuliranom rotoru samo što je zglob mahanja udaljen od središta vrtnje za neku vrijednost (Slika 3.6) što dozvoljava prijenos momenta na osovinu rotora. Vektor položaja koji je prije imao oblik



Slika 3.6: Artikulirani rotor sa pomaknutim zglobov mahanja [1]

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ -s\beta \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

sada poprima oblik

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

za  $s \leq e$  i

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ -(s-e)\beta \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

kada je  $s > e$ . Posljedično tome mijenja se inercijalni dio jednadžbe mahanja:

$$I_b \ddot{\beta} + \Omega^2 i_b \beta \quad (3.4)$$

ili

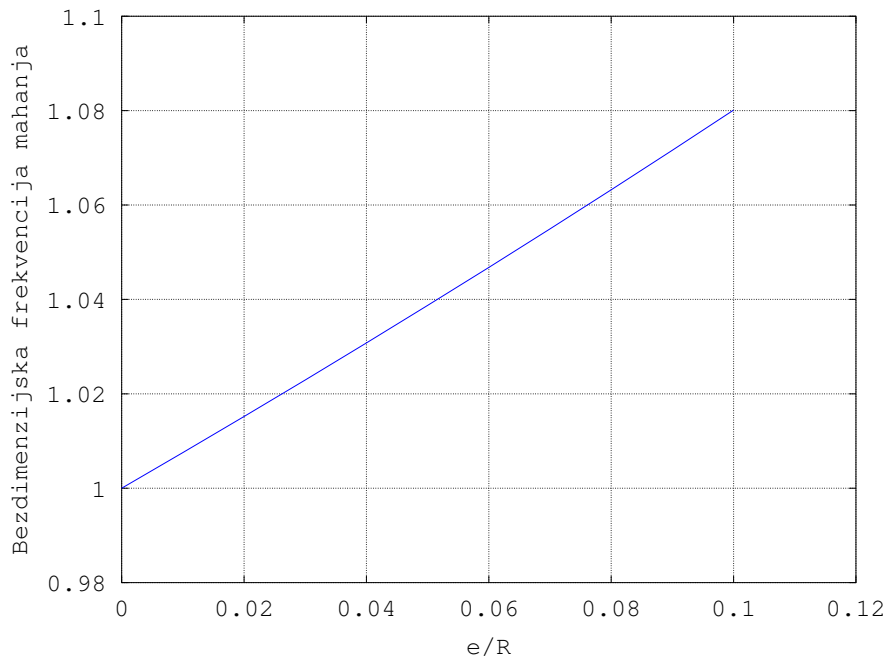
$$\ddot{\beta} + \omega_n^2 \beta, \quad (3.5)$$



pri čemu je

$$\omega_n^2 = (P\Omega)^2 = \Omega^2 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{e/R}{(1 - e/R)} \right]. \quad (3.6)$$

$P$  je bezdimenzionalna frekvencija; odnos prirodne frekvencije mahanja i broja okretaja rotora. Za artikulirani rotor bez modifikacija vrijedi da je  $P = 1$ . Slika 3.7 prikazuje kako se  $P$  mijenja sa povećanjem razmaka zgloba mahanja od središta vrtnje.



Slika 3.7: Frekvencija mahanja u odnosu na  $e$

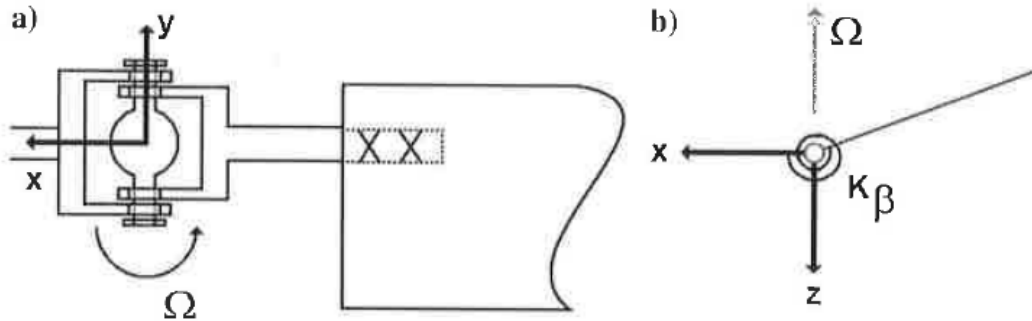
### 3.4. Artikulirani rotor sa oprugom

Ova konfiguracija je ista kao artikulirani rotor uz dodatak opruge zglobu mahanja koja prenosi moment koji uslijed mahanja (Slika 3.8). Sa ovom modifikacijom inercijalni dio jednadžbe mahanja postaje:

$$I_b \ddot{\beta} + I_b \Omega^2 \beta + K_\beta \beta, \quad (3.7)$$

ili

$$\ddot{\beta} + \left( \Omega^2 + \frac{K_\beta}{I_b} \right) \beta, \quad (3.8)$$

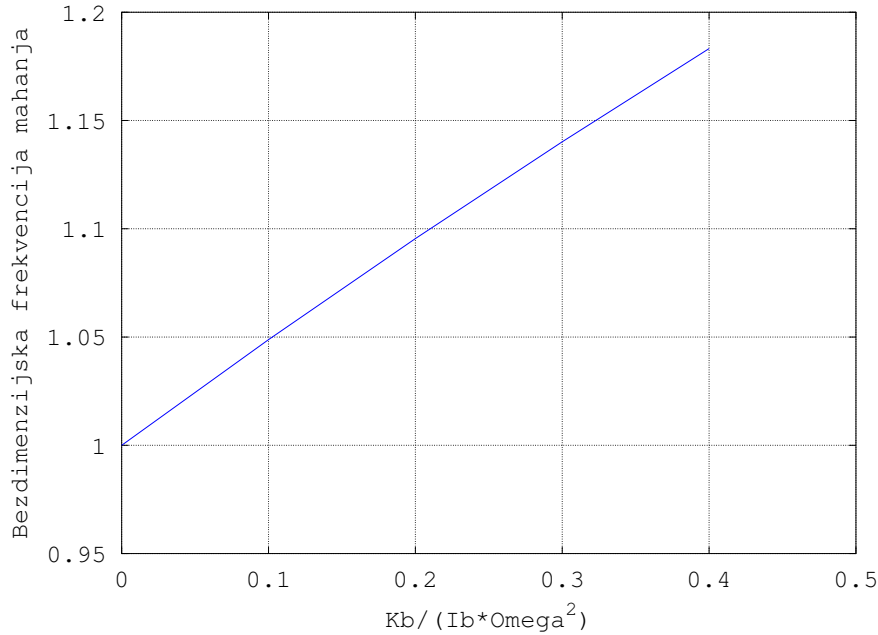


Slika 3.8: Artikulirani rotor sa oprugom [1]

gdje je frekvencija mahanja

$$\omega_n^2 = (P\Omega)^2 = \left( \Omega^2 + \frac{K_\beta}{I_b} \right). \quad (3.9)$$

Slika 3.9 prikazuje utjecaj opruge na frekvenciju mahanja.



Slika 3.9: Frekvencija mahanja u odnosu na krutost opruge

### 3.5. Delta-3 efekt

Slika 3.10 prikazuje rotor u delta-3 konfiguraciji. Osnovna ideja ove konfiguracije je da se napadni kut kraka smanji kada on maše prema gore. Ovakva konfiguracija se primjenjuje kako bi se smanjilo mahanje, vibracije i nesimetričnost uzgona. Delta-3 mijenja jednadžbu postavnog kuta ta tako da postaje

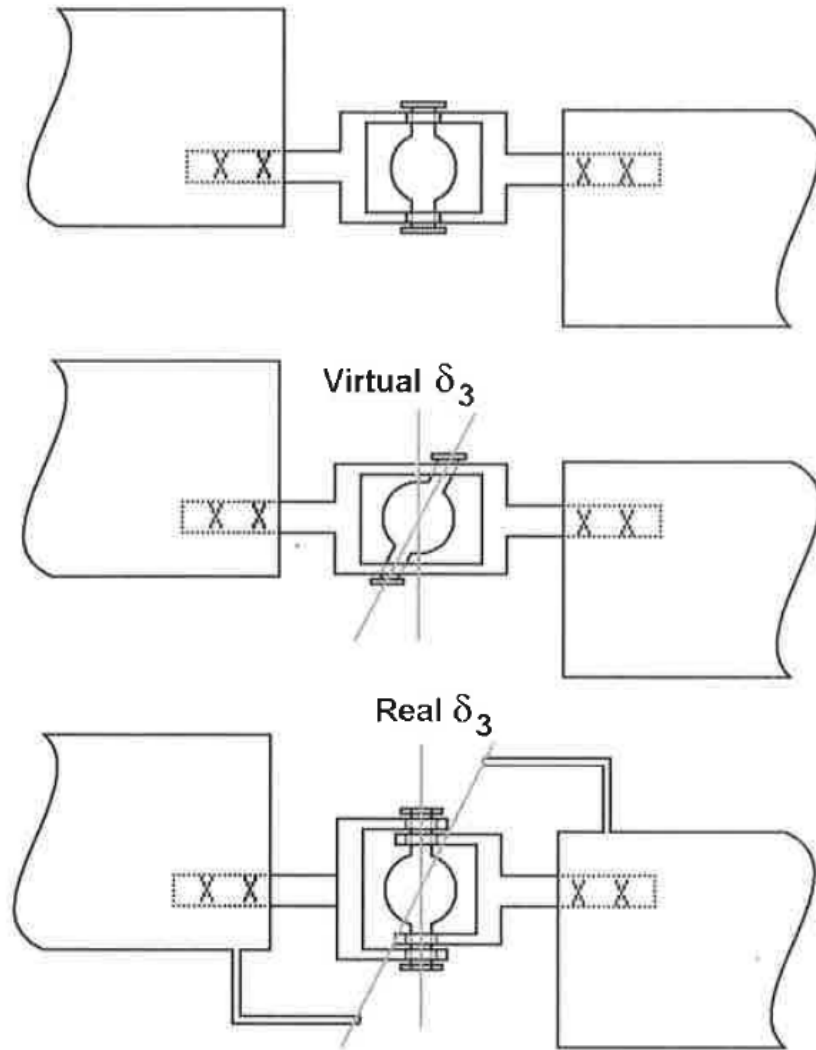
$$\theta = \theta_0 + \theta_T x + A_1 \cos(\psi) + B_1 \sin(\psi) - \tan(\delta_3) \beta. \quad (3.10)$$

U relaciji za aerodinamički moment zadnji član se može pribrojiti inercijalnom dijelu tako da taj inercijalni dio jednadžbe mahanja poprima oblik:

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta + \frac{\gamma}{8} \Omega^2 \tan(\delta_3) \beta, \quad (3.11)$$

ili

$$\ddot{\beta} + \omega_n^2 \beta, \quad (3.12)$$

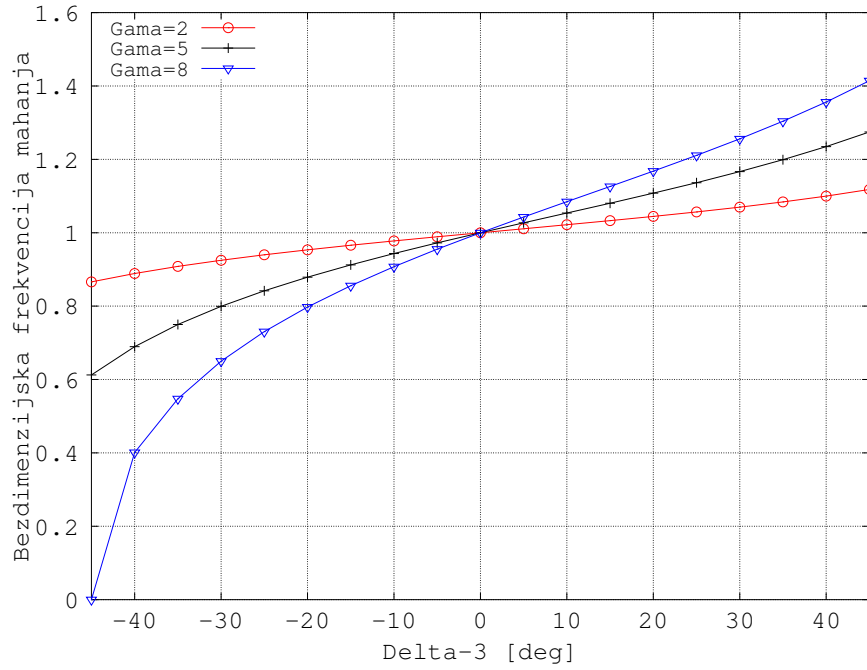


Slika 3.10: Rotor bez delta-3, sa virtualnom i realnom delta-3 konfiguracijom [1]

gdje je

$$\omega_n^2 = (P\Omega)^2 = \Omega^2 \left[ 1 + \frac{\gamma}{8} \tan(\delta_3) \right] . \quad (3.13)$$

Slika 3.11 prikazuje utjecaj delta-3 kuta na frekvenciju mahanja.



Slika 3.11: Frekvencija mahanja u odnosu na delta-3

Uzevši u obzir sve tri različite modifikacije na rotoru, jednadžba mahanja izgleda ovako:

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{3}{2} \frac{e/R}{(1 - e/R)} \right] + \left( \frac{K_\beta}{I_b \Omega^2} \right) + \left[ \frac{\gamma}{8} \tan(\delta_3) \right] \right\} \beta = M_{y_{ar}} , \quad (3.14)$$

a izraz za frekvenciju mahanja poprima oblik

$$\frac{\omega_n^2}{\Omega^2} = \left\{ 1 + \left[ \frac{3}{2} \frac{e/R}{(1 - e/R)} \right] + \left( \frac{K_\beta}{I_b \Omega^2} \right) + \left[ \frac{\gamma}{8} \tan(\delta_3) \right] \right\} . \quad (3.15)$$

## 4 Analiza rezultata

Analiza je provedena za horizontalni i vertikalni let a rezultati su uspoređeni sa teorijom elementarnog kraka (BET) i eksperimentima za sve relevantne vrijednosti za koje je bilo moguće doći do takvih podataka.

### 4.1. Analiza rezultata za lebdenje

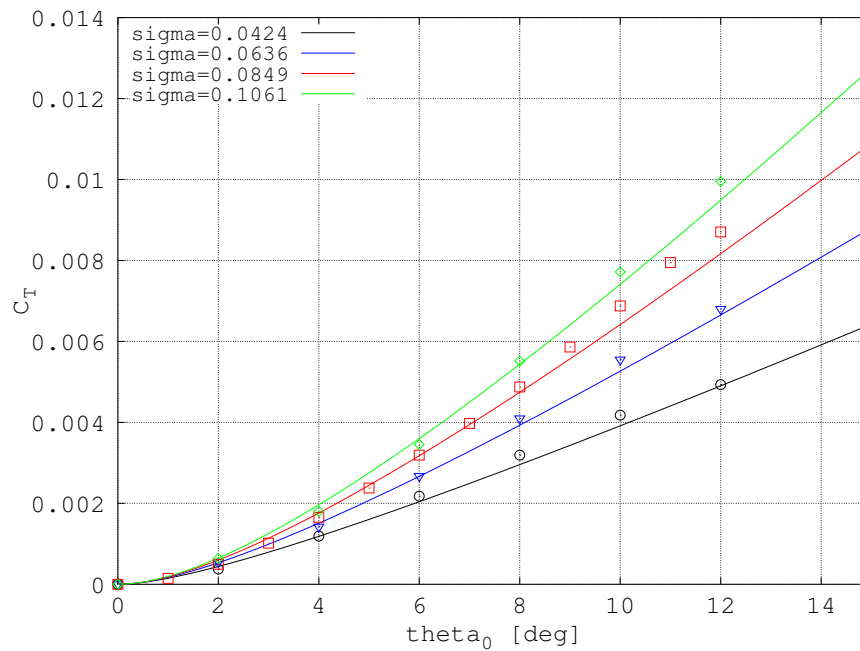
Slika 4.1 prikazuje odnos koeficijenta potiska i postavnog kuta u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima [4] pri lebdenju i za različite koeficijente ispunjenosti. Razlika u eksperimentalnim i proračunskim rezultatima nije velika i model dobro prati rezultate eksperimenta.

### 4.2. Analiza rezultata za horizontalni let

Analiza modela zatvorene forme provedena je za model rotora sličnom helikopteru SA 330J PUMA (tablica 4.1).

Analiza horizontalnog leta provedena je za koeficijente napredovanja u rasponu od 0.1 do 0.4. Tablica 4.2 prikazuje ulazne podatke, odnosno komande pilota, u odnosu na koeficijente napredovanja. Slike 4.3, 4.4 i 4.5 prikazuju odnose kuta konusa, uzdužnog i bočnog cikličnog kuta mahanja u usporedni sa rezultatima BET modela (prema [1]), gdje je vidljivo dobro slaganje dviju teorija za kuteve mahanja.

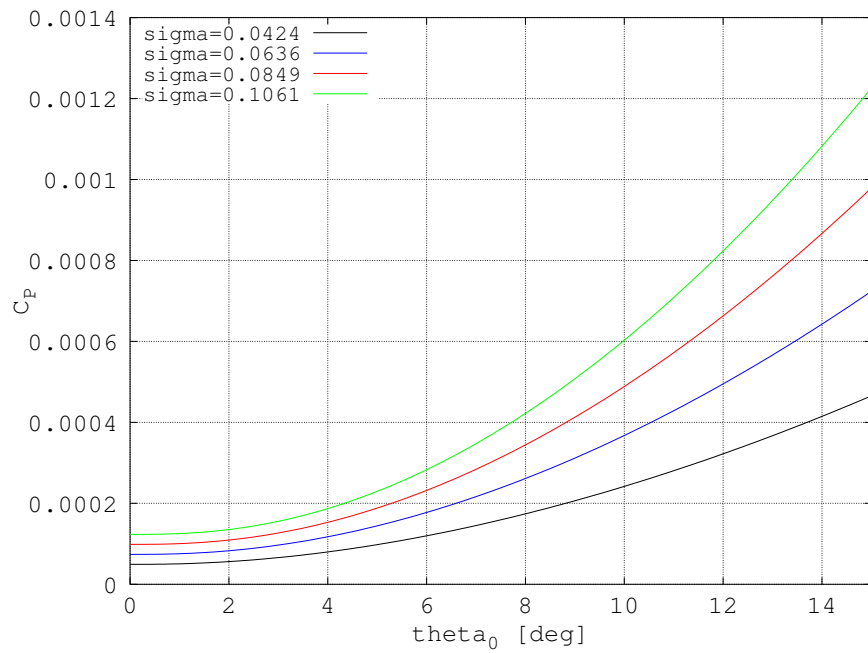
Na slikama 4.6, 4.7, 4.8 i 4.9 se vide odnosi inducirane brzine i sila u z, x i y osi u odnosu na kut napredovanja. I ovdje je uočljivo dobro slaganje dviju teorija osim u



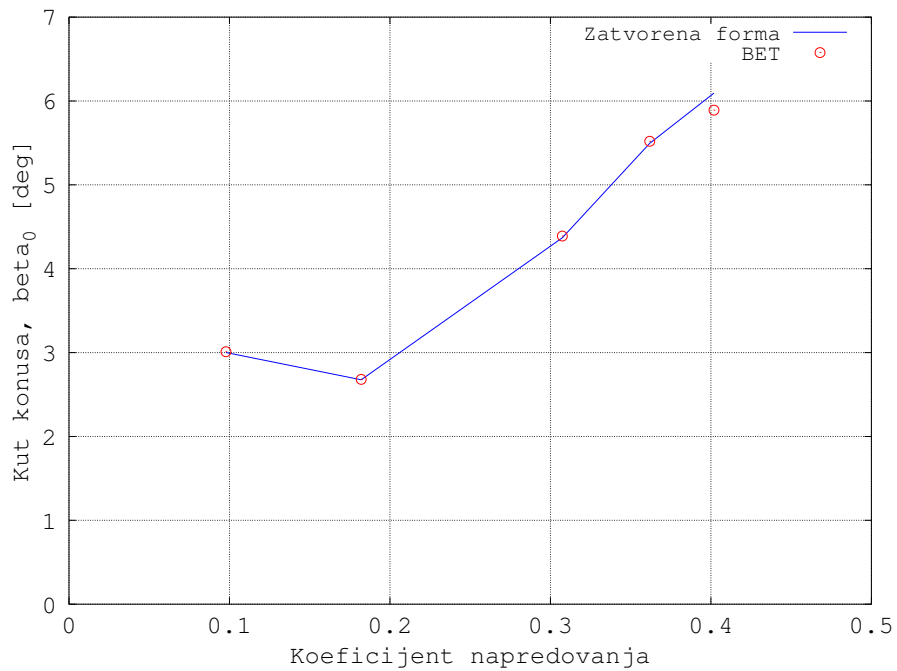
Slika 4.1: Odnos koeficijenta potiska,  $C_T$ , i postavnog kuta,  $\theta_0$ , u lebdenju i za  $\theta_T = 0$  u usporedbi sa eksperimentalnim rezultatima

analizi sile u x osi gdje su odstupanja nešto veća. Jedan od razloga takvoj razlici može biti u tome što uzdužna i bočna sila jako ovise o kutevima mahanja pa čak i male razlike u kutevima mahanja mogu dovesti do relativno velikih razlika u silama.

Slike 4.10, 4.11 i 4.12 prikazuju promjenu momenata oko sve tri osi u odnosu na koeficijent napredovanja. Okretni moment je uspoređen sa BET i ovdje je vidljiva veće odsutpanje sa povećanjem razlike kuteva mahanja.



Slika 4.2: Odnos koeficijenta snage,  $C_P$ , i postavnog kuta,  $\theta_0$ , u lebdenju i za  $\theta_T = 0$



Slika 4.3: Odnos kuta konusa,  $\beta_0$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$

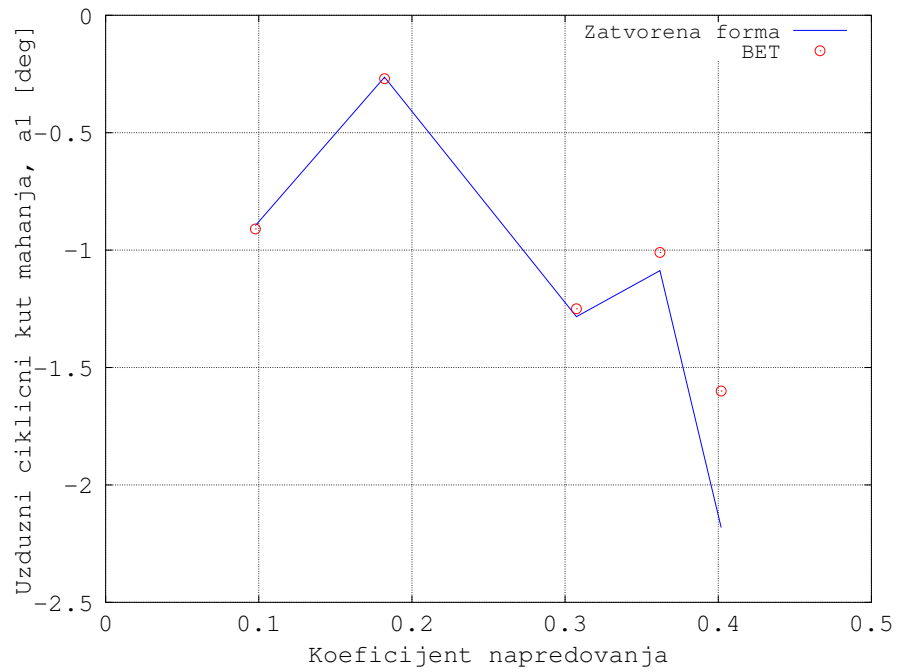


Tablica 4.1: Podaci o helikopteru SA 330 Puma

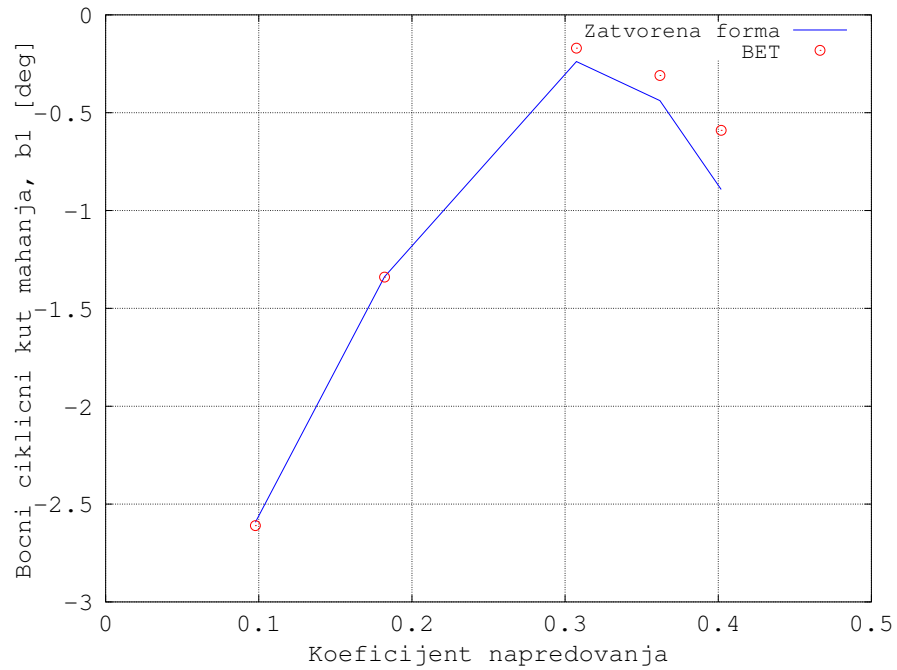
$R$	7.5 m	$c$	0.54 m
$b$	4	$R_0$	1.75 m
$\theta_T$	$-8^\circ$		
$\Omega$	28.3 rad/s	$I_b$	1280 kg m <sup>2</sup>
$c_{d_0}$	0.009	$c_{d_1}$	0
$c_{d_2}$	0.013		

Tablica 4.2: Ulazni podaci upravljanja za horizontalni let

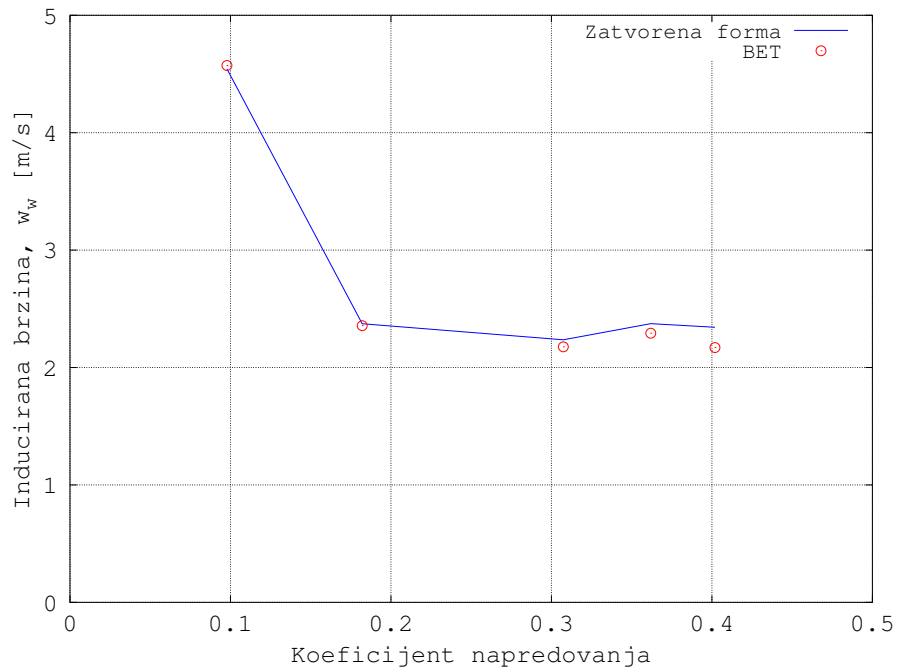
$\mu$	$\theta_0$	$A_1$	$B_1$
0.098	$11^\circ$	$3^\circ$	$-2^\circ$
0.18	$10^\circ$	$2^\circ$	$-2^\circ$
0.31	$13^\circ$	$2^\circ$	$-6^\circ$
0.36	$15^\circ$	$3^\circ$	$-8^\circ$
0.40	$17^\circ$	$4^\circ$	$-11^\circ$



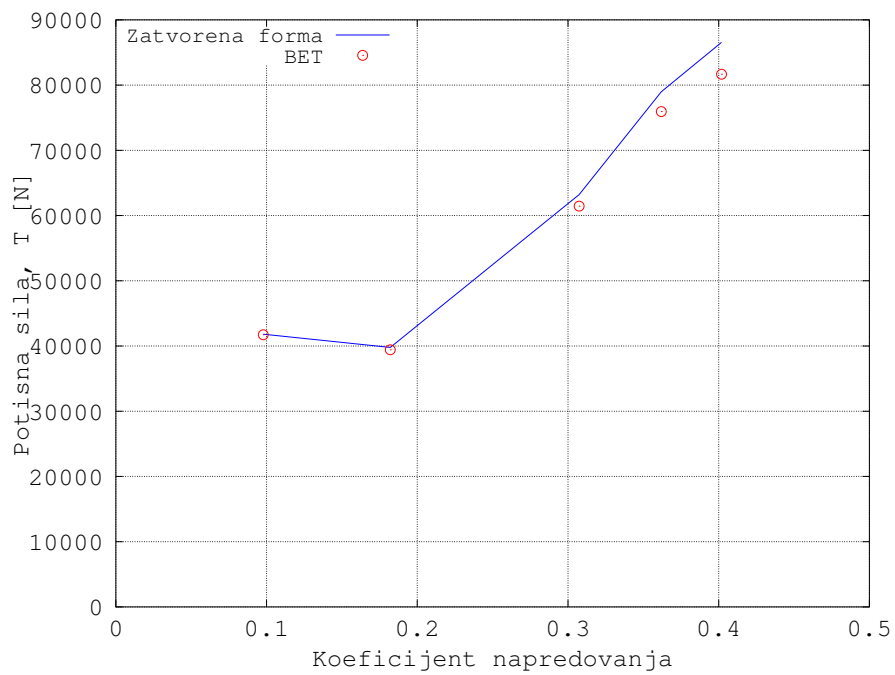
Slika 4.4: Odnos uzdužnog cikličnog kuta,  $a_1$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$



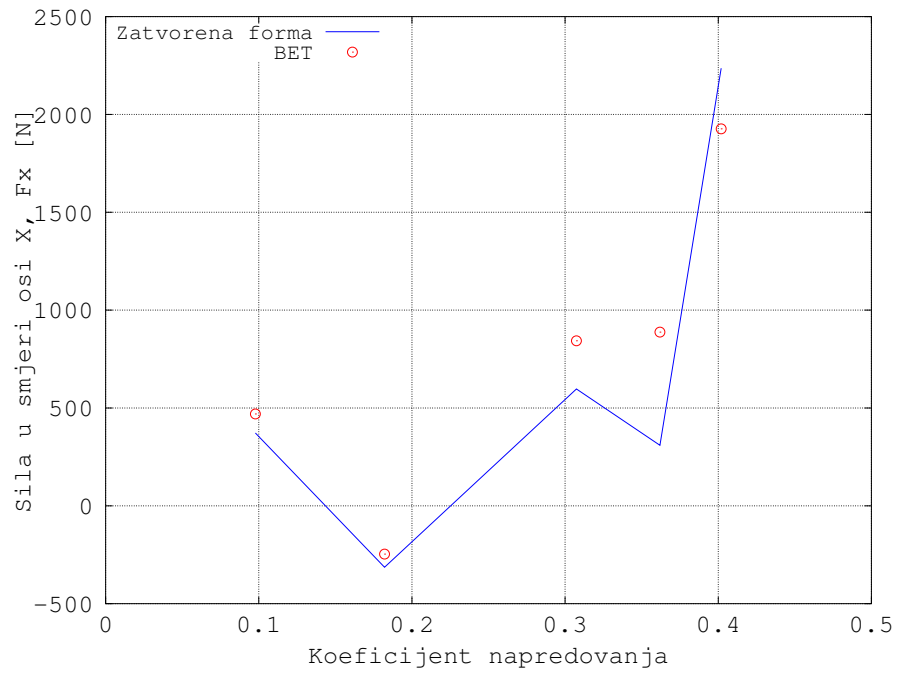
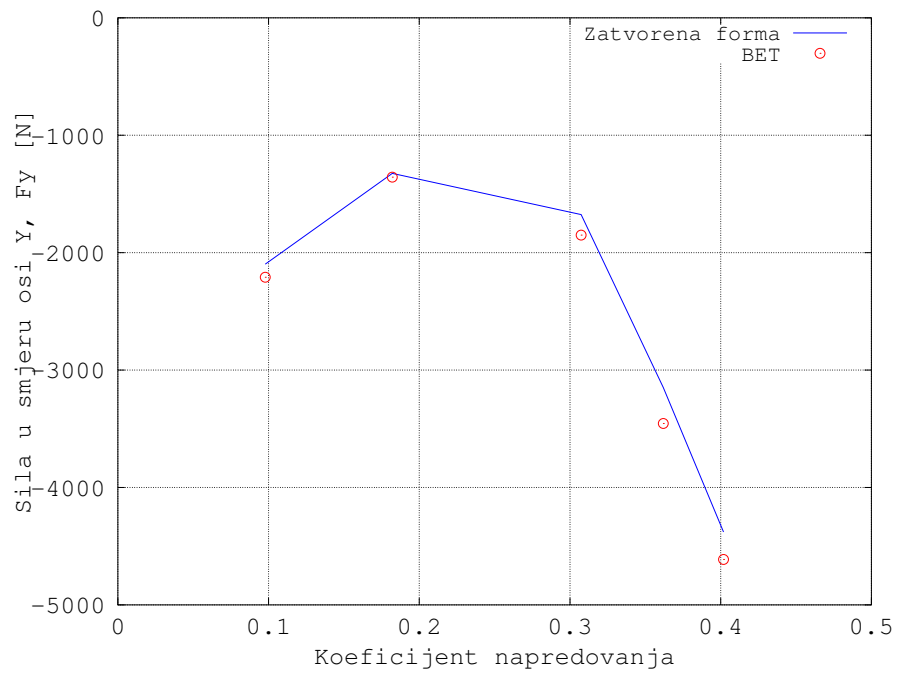
Slika 4.5: Odnos bočnog cikličnog kuta,  $b_1$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$

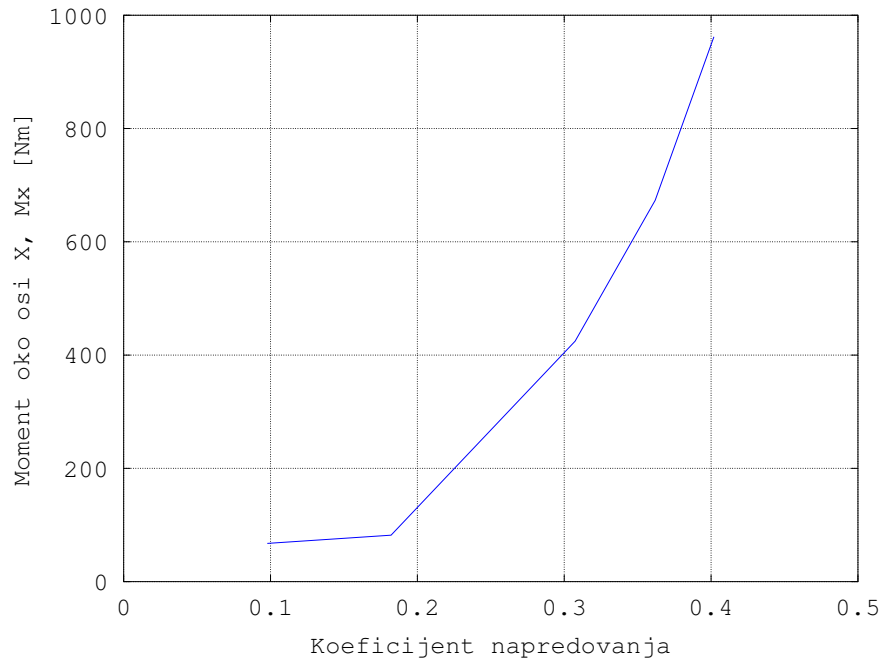


Slika 4.6: Odnos inducirane brzine,  $w_w$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$

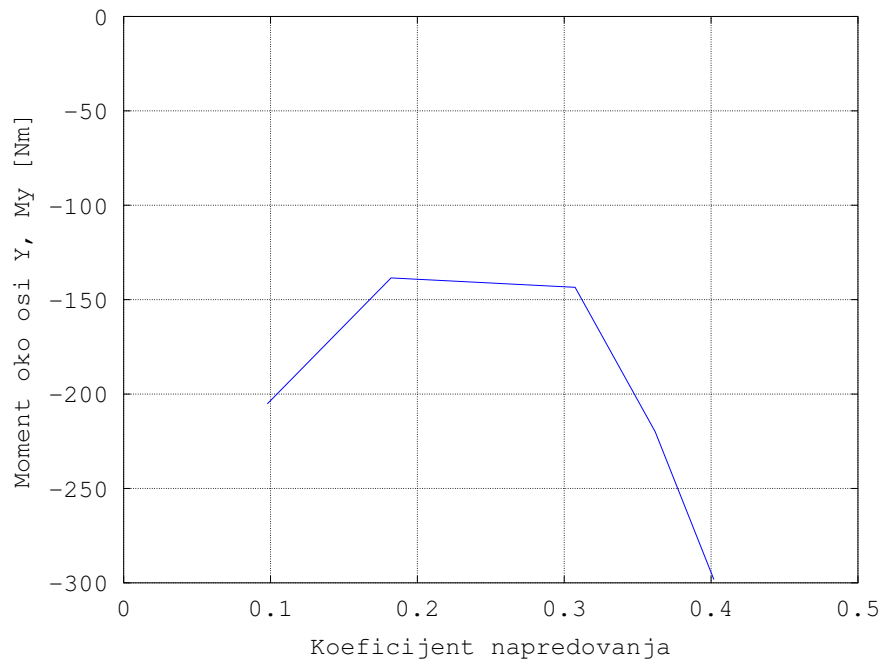


Slika 4.7: Odnos potisne sile,  $T$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$

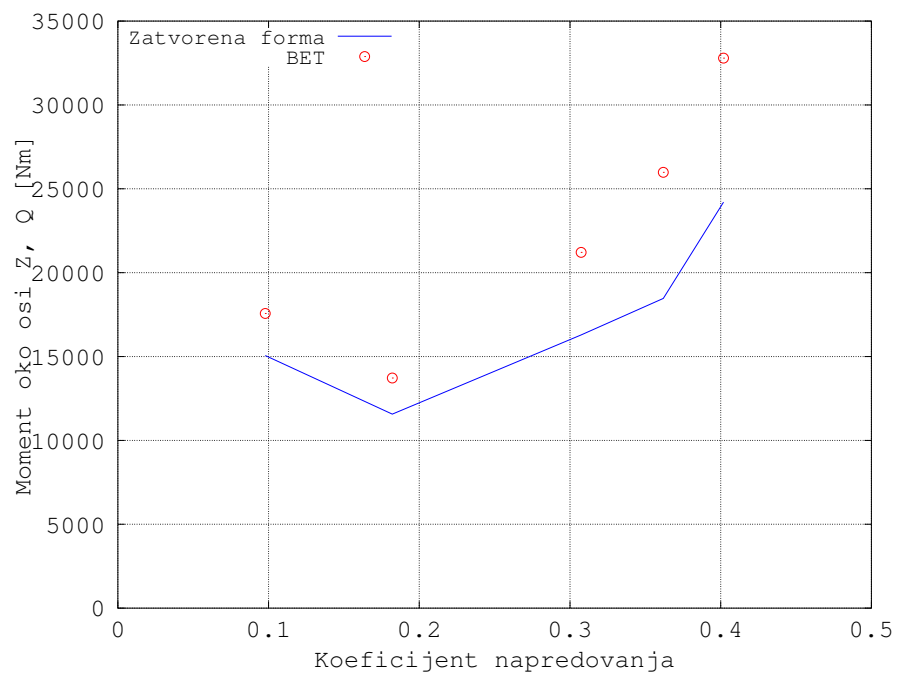

 Slika 4.8: Odnos sile u smjeru osi x,  $F_x$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$ 

 Slika 4.9: Odnos sile u smjeru osi y,  $F_y$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$



Slika 4.10: Odnos momenta oko osi x,  $M_x$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$



Slika 4.11: Odnos momenta oko osi y,  $M_y$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$



Slika 4.12: Odnos okretnog momenta rotora,  $Q$ , i koeficijenta napredovanja,  $\mu$

## 5 Zaključak

U diplomskom radu napravljen je model helikopterskog rotora zatvorene forme prema Dreier [1] koji za zadane ulazne podatke (komande pilota, brzine i kutne brzine) daje sile, momente i kuteve mahanja. Model je primjenjen za analizu lebdenja i horizontalnog leta na rotor poznatih karakteristika SA 330J PUMA (tablica: 4.1).

U modelu su uvedene određene pretpostavke i ograničenja:

1. Kutevi mahanja su mali.
2. Postavni kute i kut uvijanja su mali. Kut uvijanja je linearno promjeniv uzduž dužine kraka rotora.
3. Pretpostavljena je uniformna raspodjela inducirane brzine.
4. Lopatice rotora su potpuno krute.
5. Zglob mahanja je u središtu vrtnje.
6. Lopatica je jednostavne geometrije, sa konstantnom tetivom, ravnim linijama i bez suženja.
7. Korištena je linearna aerodinamika.
8. Zanemareno je gibanje u ravnini rotacije, zabacivanje.

Spomenute su najbitnije modifikacije glavčine rotora (radijalni ekscentar zgloba mahanja, opruga u zglobu mahanja i delta-3 efekt) i na koji način oni utječu na dinamiku rotora. Uspoređen je model s eksperimentalnim rezultatima za lebdenje i sa rezultatima

BET za horizontalni let. Osnovna prednost ovog modela je što je relativno jednostavan te zbog toga ne zahtjeva puno resursa i daje rezultate relativno brzo, a analizom rezultata se vidi uglavnom dobro poklapanje sa BET i eksperimentom, što dokazuje opravdanost korištenja ovog modela u praksi i u analizama performansi i ravnotežnog leta.



# Literatura

- [1] Mark E. Dreier. *Introduction to Helicopter and Tiltrotor Simulation*. AIAA, USA, 2007.
- [2] Josip Župan. *Primjena BET za rotor helikoptera u vertikalnom i horizontalnom letu*. diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2009.
- [3] Raymond W. Prouty. *Helicopter performance, stability and control*. Kreiger Publishing Company Inc., Malabar, Florida, 1986.
- [4] R. A. Hefner M. Knight. Static thrust of the lifting airscrew. 1937.